Produits infinis

Alexandre Bailleul*

Bien moins connus que les « sommes infinies », c'est-à-dire les séries, les produits infinis sont en fait des objets qui en sont relativement proches, et qui s'avèrent très utiles en analyse, complexe notamment. Dans cette petite note, qui ne prétend pas à l'exhaustivité, je donne les notions de base qui permettent de les étudier.

Partons tout d'abord d'une série $\sum_n u_n$, de nombres complexes par exemple. En quoi consistent cet objet et son étude ?

Comme chacun le sait, une série se résume à la suite de ses sommes partielles, et la question fondamentale concernant cette série est sa convergence. On voit apparaître deux ingrédients fondamentaux, que l'on retrouvera avec les produits infinis : une opération de somme, et une notion de convergence de suite, et donc de limite. C'est-à-dire que pour parler de séries, il suffit d'avoir une loi de groupe, abélien de préférence (en général la loi + sur $\mathbb{C}$) et une topologie (en général la topologie usuelle sur $\mathbb{C}$). Pour que les propriétés classiques sur les sommes de séries restent vraies, on exige bien sûr que ces eux structures soient compatibles, c'est-à-dire que l'on ait une structure de groupe topologique.

Sans avoir besoin de disserter sur les groupes topologiques abstraits, on peut faire le simple constat suivant : le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe topologique pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}$. Nous sommes maintenant prêt à nous attaquer aux produits infinis !

1 Définition et convergence

Définition. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls. Le *produit infini* des u_n, noté $\prod_n u_n$, est la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)_N$.

Pourquoi se restreindre à des complexes non nuls ? Pour qu'ils soient bien membres du groupe $\mathbb{C}^*$. De plus si l'un deux est nul, l'étude de tels produits

*Merci à Bernard Etienne d'avoir signalé une coquille qui s'était glissée dans ce document.

n'a pas vraiment d'intérêt... Le fait de travailler dans le groupe $\mathbb{C}^*$ a une autre conséquence importante dans la définition suivante.

Définition. Soit $\prod_n u_n$ un produit infini (de nombres complexes). On dit que ce produit *converge* si la suite $(\prod_{n=0}^{N} u_n)_N$ converge vers un nombre complexe non nul. Dans ce cas, cette limite est appelée le *produit des* u_n et est notée $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$. Dans le cas contraire on dit que le produit diverge.

Et oui, pour converger, il faut converger dans le groupe, donc vers un nombre complexe non nul. Faute de mieux, on utilisera les termes produits pour désigner à la fois un produit infini ou sa limite lorsque celle-ci existe.

Exemples.

- Le produit $\prod_n \frac{1}{2}$ diverge.
- Le produit $\prod_n 1$ converge.
- Le produit $\prod_n \left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.
- Le produit $\prod_n \left(1-\frac{1}{n}\right)$ diverge.

Remarquons par exemple que les deux derniers produits divergent pour deux raisons différentes : le dernier diverge vers 0, tandis que celui d'avant diverge vers $+\infty$ (il suffit de calculer les produits partiels, qui se télescopent).

On a alors le résultat suivant dont la démonstration est immédiate.

Proposition. *Soient* $\prod_n u_n$ *et* $\prod_n v_n$ *deux produits infinis de nombres complexes.*

i) Si les deux produits convergent alors le produit $\prod_n u_n v_n$ *converge vers*

$$\left(\prod_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\prod_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

ii) Si l'un des deux produits converge et l'autre diverge alors le produit $\prod_n u_n v_n$ *diverge.*

iii) Si les deux produits divergent vers 0 *alors le produit* $\prod_n u_n v_n$ *diverge (vers* 0*).*

Remarque. On ne peut pas conclure en général quand les deux produits divergent comme le montrent les exemples suivants : $u_n = \frac{1}{2}$ et $v_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $u_n = v_n = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition. *Si le produit infini* $\prod_n u_n$ *converge, alors* $u_n \to 1$ *quand* $n \to +\infty$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons P_n le complexe $\prod_{k=0}^{n} u_k$. Par hypothèse, la suite $(P_n)_n$ converge vers un nombre complexe non nul. Alors on a

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow 1$$

quand n tend vers $+\infty$. □

Remarque. On voit bien que le fait que la limite est non nulle est crucial ici.

On dispose maintenant d'une condition suffisante (grossière) de divergence d'un produit infini. Elle n'est bien sûr pas nécessaire comme le montre l'exemple déjà vu de $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Critères de convergence sur $\mathbb{R}$

À partir de maintenant, on supposera toujours que le terme général des produits infinis que l'on étudie tend vers 1, et est différent de 0, sans quoi l'étude du produit en question n'a pas d'intérêt. On peut donc toujours considérer que ce terme général est de la forme $(1 + u_n)$ avec $u_n \to 0$ quand n tend vers $+\infty$ et $u_n \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on n'y perd aucune généralité, quitte à écrire $u_n = 1 + (u_n - 1)$).

Nous n'avons pas encore croisé de produit convergent non trivial. Il est temps d'établir des critères de convergence. Tout d'abord, y a-t-il un moyen pour se ramener à l'étude d'une série de nombres complexes ? L'isomorphisme de groupes (topologiques) $\log : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ permet de répondre partiellement à cette question.

Théorème. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels différents de* -1 *tendant vers* 0. *Alors le produit infini* $\prod_n (1+u_n)$ *converge si et seulement si la série* $\sum_n \log(1+u_n)$ *converge.*

Démonstration. Comme la suite $(u_n)_n$ converge vers 0, on a en particulier que $1 + u_n > 0$ pour n assez grand, disons pour $n \geq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on a pour tout $n \geq n_0$,

$$\prod_{k=n_0}^{n} (1 + u_k) = \exp\left(\log\left(\prod_{k=n_0}^{n} (1 + u_k)\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n} \log(1 + u_k)\right).$$

Si la série $\sum_n \log(1+u_n)$ converge alors le produit $\prod_n (1+u_n)$ converge, par continuité de l'exponentielle, vers

$$\prod_{k<n_0}(1+u_k)\exp\left(\sum_{k=n_0}^{+\infty}\log(1+u_k)\right)$$

qui est bien non nul. Réciproquement, si le produit converge alors la série converge en utilisant la formule

$$\sum_{k=n_0}^{n}\log(1+u_k)=\log\left(\prod_{k=n_0}^{n}(1+u_k)\right)$$

et le fait que la limite du produit est non nulle. $\square$

Corollaire. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels différents de -1 tendant vers 0. Si $(u_n)_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang, alors le produit infini $\prod_n(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_n u_n$ converge.*

Démonstration. En effet, on a $\log(1+x)\sim x$ quand $x\to 0$. Comme la suite $(u_n)_n$ est de signe constant à partir d'un certain rang, on en déduit que les séries $\sum_n \log(1+u_n)$ et $\sum_n u_n$ ont même nature. $\square$

Exemples. Les produits infinis

$$\prod_n\left(1+\frac{1}{n!}\right)$$

et

$$\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

convergent. Le produit infini

$$\prod_n\left(1+\frac{1}{n\log(n)}\right)$$

diverge.

Remarque. L'hypothèse du signe constant est essentielle. En effet, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}$ diverge, cependant la série de terme général

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

converge, et donc le produit

$$\prod_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}\right)$$

converge.

En fait, on a $\log(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$ quand $n \to 0$ et la suite $(u_n^2)_n$ est de signe constant. On en déduit que si la série $\sum_n u_n$ converge, alors $\prod_n (1+u_n)$ et $\sum_n u_n^2$ ont même nature. Ainsi, le produit

$$\prod_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

converge.

Voyons un premier exemple de calcul de produit infini. Il justifie à lui seul l'étude de ces produits :

Théorème (Produit eulérien)**.** *Soit x un réel strictement supérieur à 1. Alors*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}},$$

où le produit est pris sur tous les nombres premiers.

Démonstration. Soit N un entier supérieur à 2. Notons $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers sont inférieurs à N. Notons également $p_1, \dots, p_{r_N}$ les nombres premiers inférieurs à N. En utilisant le développement de la somme d'une série géométrique convergente, on a

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} = \prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{kx}},$$

car pour tout nombre premier p, $0 \leq \frac{1}{p} < 1$. Ces séries étant toutes absolument convergentes (car convergentes à termes positifs), on en déduit que le produit de leur somme n'est autre que la somme de leur produit de Cauchy :

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^x}} = \sum_{k_1, \dots, k_{r_N} = 1}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{k_1 x} \dots p_{r_N}^{k_{r_N} x}} = \sum_{k_1, \dots, k_{r_N} = 1}^{+\infty} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} \dots p_{r_N}^{k_{r_N}}\right)^x} = \sum_{n \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x}.$$

Mais

$$\sum_{n \in \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) - \sum_{n \notin \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x}$$

et

$$0 \leq \sum_{n \notin \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \to 0$$

quand N tend vers $+\infty$, car si $n \notin \mathcal{P}_N$, alors $n > N$ (tous ses facteurs premiers sont supérieurs à N). Cela prouve la convergence du produit vers $\zeta(x)$. $\square$

Remarque. À partir de cette formule, fondamentale en théorie des nombres, on obtient notamment que la fonction ζ ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ (on va bientôt voir une généralisation de ce résultat). En effet, le produit eulérien portant sur les nombres premiers converge, dans le sens discuté plus haut car la série $\sum_p \frac{1}{p^x}$ est convergente pour $x > 1$ et donc la valeur du produit est non nul.

3 Critères de convergence sur $\mathbb{C}$

Passons maintenant aux produits infinis de nombres complexes. On voit immédiatement que leur étude va être plus compliquée, étant donné que le logarithme complexe n'est plus un morphisme de groupes.

Cependant, si la suite de nombres complexes $(u_n)_n$ converge vers 0, alors $1 + u_n \in B(1, 1)$ pour tout n assez grand. La détermination principale du logarithme y est définie, et même réciproque à droite de l'exponentielle. Dans toute la suite, log désigne cette détermination principale sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On prouve alors le résultat suivant, où l'on utilise cette fois que la fonction exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$.

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes différents de -1 tendant 0. Si la série $\sum_n \log(1 + u_n)$ converge alors le produit infini $\prod_n (1 + u_n)$ converge.*

Démonstration. Comme précédemment, on a $|u_n| < 1$ pour $n \geq n_0$, et pour de tels n,

$$\prod_{k=n_0}^{n} (1 + u_k) = \prod_{k=n_0}^{n} \exp(\log(1 + u_k)) = \exp\left(\sum_{k=n_0}^{n} \log(1 + u_k)\right),$$

ce qui prouve la convergence du produit (vers une limite non nulle). $\square$

Malheureusement, comme le laisse présager le dernier énoncé, la réciproque est fausse ! On ne peut pas utiliser la relation $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$ pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$, qui est fausse en général. Pour un contre-exemple on considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \exp\left(i \frac{\lfloor 2\pi n^2 \rfloor}{n^2}\right) - 1$, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) &= \prod_{k=1}^{n}\exp\left(i\frac{\lfloor 2\pi k^2\rfloor}{k^2}\right)\\ &= \exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor 2\pi k^2\rfloor}{k^2}\right)\\ &= \exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\frac{2\pi k^2-\{2\pi k^2\}}{k^2}\right)\\ &= \exp\left(-i\sum_{k=1}^{n}\frac{\{2\pi k^2\}}{k^2}\right)\end{aligned}$$

qui tend vers un complexe non nul quand n tend vers $+\infty$ car la série $\sum_n \frac{\{2\pi n^2\}}{n^2}$ converge. Cependant comme $\frac{\lfloor 2\pi n^2\rfloor}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, la série $\sum_n \log(1+u_n)$ diverge grossièrement.

On déduit immédiatement du dernier énoncé et du développement limité $\log(1+u_n) = u_n + o(u_n)$ quand $n \to +\infty$ le résultat suivant.

Théorème. *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes différents de -1 tendant 0. Si la série $\sum_n u_n$ converge absolument alors le produit infini $\prod_n(1+u_n)$ converge. En particulier, si la convergence est absolue, alors il y a convergence du produit.*

Définition. Un produit de nombre complexes $\prod_n(1+u_n)$ est dit *absolument convergent* si la série $\sum_n u_n$ est absolument convergente.

En particulier, un produit absolument convergent est convergent.

Exemples. Le produit infini

$$\prod_n\left(1+\frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}\right)$$

converge, où $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ n'est pas un multiple entier de 2π. Il n'est pas absolument convergent si $\alpha \leq 1$.

Le produit infini

$$\prod_n\left(1+\frac{i^{n!}}{n^{\log(n)}}\right)$$

est absolument convergent.

Remarque. On prendra garde au fait que la convergence absolue, au sens où le produit $\prod_n |1+u_n|$ converge, n'implique pas la convergence du produit $\prod_n (1+u_n)$. Pour s'en convaincre, on considère pour $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{i}{n}$. En effet, on a d'une part

$$\left|1+\frac{i}{n}\right| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

d'où la convergence du produit $\prod_n \left|1+\frac{i}{n}\right|$, tandis que la série $\sum_n \log\left(1+\frac{i}{n}\right)$ diverge, d'où la divergence du produit $\prod_n \left(1+\frac{i}{n}\right)$. Ce phénomène s'explique par le fait que le terme général du second produit a pour argument $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$, et ces arguments s'ajoutant, les produits partiels tournent indéfiniment autour de 1 ($\arctan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ quand n tend vers $+\infty$).

Retournons à la fonction ζ. Nous avons vu tout à l'heure que pour $x > 1$, $\zeta(x) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^x}}$. Cette formule est en fait valable pour tout nombre complexe de partie réelle strictement plus grande que 1.

Théorème (Produit eulérien)**.** *Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$,*

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

En particulier, la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$.

Démonstration. La démonstration est similaire au cas réel. On justifie les diverses convergences en passant aux modules. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$. On développe tout d'abord en série géométrique les quotients

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{ks}},$$

qui convergent absolument car pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\Re(s)}}$. On en prend les produits partiels pour trouver, avec les mêmes notations que précédemment,

$$\prod_{p \leq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \zeta(s) - \sum_{n \notin \mathcal{P}_N} \frac{1}{n^s},$$

dont le second membre tend vers 0 en tant que reste de série (absolument) convergente.

Enfin le dernier point vient de la convergence du produit

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}},$$

dû à la convergence de la série de terme général (indexée par les nombres premiers p)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} - 1 = \frac{1}{p^s - 1}.$$

$\square$

Remarque. Ce théorème a beaucoup de conséquence en théorie des nombres. J'en citerai deux.

i) Tout d'abord, la fonction zeta admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, avec un unique pôle simple en 1, de résidu 1. Ce prolongement (que l'on appellera toujours ζ) vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

Le fait que la fonction ζ ne s'annule pas sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ montre alors que celle-ci admet des zéros d'ordre 1 en tous les entiers strictement négatifs pairs, et que ce sont ses seuls zéros sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) < 0\}$.

En effet, dans la formule ci-dessus, le sinus s'annule pour $s = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, et la fonction Γ (prolongée méromorphiquement à $\mathbb{C}$) admet des pôles simples en les entiers négatifs, donc pour $s = 1 + n, n \in \mathbb{N}$, et nulle part ailleurs. Pour $s = 2n, n \in \mathbb{N}^*$, le zéro du sinus compense le pôle de Γ. Pour $s = 2n + 1, n \in \mathbb{N}^*$, la seule possibilité est que ζ s'annule en $1-(2n+1) = -2n$, et que ce zéro soit d'ordre 1 car le pôle de Γ est simple et $\zeta(2n+1) \neq 0$. On vérifie que ce sont bien les seuls cas à étudier.

ii) Ensuite, en prenant le logarithme du produit eulérien (on peut justifier les convergences et les interversions correctement), on trouve, pour $\Re(s) > 1$,

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = -\sum_p \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{np^{ns}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_p \frac{1}{np^{ns}}$$

d'où en dérivant

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p} \frac{\log(p)}{p^{ns}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

où Λ est la fonction de Von Mangoldt, définie par $\Lambda(n) = \log(p)$ si n est une puissance du nombre premier p, 0 sinon. On démontrera cette égalité rigoureusement plus loin.

Cette formule est un point de départ possible pour démontrer le fameux théorème des nombres premiers. Rappelons que celui-ci énonce que si $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs au réel x, alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

quand x tend vers $+\infty$. On montre que ce théorème est équivalent au fait que

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \sim x$$

quand x tend vers $+\infty$, ce que l'on peut prouver à l'aide d'un peu d'analyse complexe et la formule ci-dessus. [1]

4 Produits infinis de fonctions

On a désormais envie d'étudier des produits infinis de fonctions. Ces produits étant limites de leurs produits partiels, on sait qu'en cas de convergence uniforme, la limite héritera des propriétés de continuité ou d'holomorphie des fonctions considérées. Commençons par un lemme.

Lemme. *Si* $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{C}$ *alors*

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + |u_k|) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} |u_k|\right)$$

et

$$\left|\prod_{k=1}^{n} (1 + u_k) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |u_k|) - 1.$$

1. Il y a quand même du travail. On peut utiliser la formule de Perron, qui lie la somme partielle d'une série de Dirichlet à une intégrale impliquant la somme de cette série sur une droite verticale. Ici la série de Dirichlet en question est justement $\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}$. En affinant légèrement la zone de non annulation de ζ, on peut estimer notre intégrale et obtenir l'équivalent souhaité.

Démonstration. La première inégalité provient de l'inégalité classique $1 + x \leq \exp(x)$ valable pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Pour la seconde on procède par récurrence. Elle est trivialement vraie si $n = 1$, et si $u_{n+1} \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned}\left|\prod_{k=1}^{n+1}(1+u_k) - 1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) - 1\right)(1+u_{n+1}) + u_{n+1}\right| \\ &\leq \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k) - 1\right)\right|(1+|u_{n+1}|) + |u_{n+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|u_k|) - 1\right)(1+|u_{n+1}|) + |u_{n+1}| \\ &= \prod_{k=1}^{n+1}(1+|u_k|) - 1.\end{aligned}$$

□

Passons maintenant au théorème principal de convergence uniforme de produits de fonctions, qui nous servira à obtenir des propriétés de continuité ou d'holomorphie de produits infinis. Dans la suite on notera $Z(f)$ l'ensemble des zéros d'une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème. *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions d'un ensemble X dans $\mathbb{C}$, toutes bornées. On suppose que la série de fonctions $\sum_n |f_n|$ converge uniformément sur X. Alors le produit infini $\prod_n (1 + f_n)$ converge uniformément sur X vers une fonction f, on a $Z(f) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Z(1 + f_n)$ et le produit est commutativement convergent, c'est-à-dire que pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, le produit infini $\prod_n (1 + f_{\sigma(n)})$ converge uniformément sur X vers f.*

Démonstration. Notons que la converge simple de la série de fonctions $\sum_n f_n$ sur X nous donne, par les critères de convergence précédents, l'existence de la fonction limite f en tout point de X, même là où un terme du produit s'annule (auquel cas la limite est nulle). De plus le fait que le produit $\prod_n (1 + f_n(x))$ converge au sens précédemment discuté si $f_n(x) \neq -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre d'ores et déjà l'égalité $Z(f) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Z(1 + f_n)$. Il nous reste à voir que la convergence est en fait uniforme, et commutative.

Tout d'abord, par convergence uniforme de la série $\sum_n |f_n|$, et comme les f_n sont bornées, la fonction somme de cette série est également bornée, disons par $M > 0$. Alors par le lemme précédent, on a

$$\forall x \in X, \forall N \in \mathbb{N}, \left|\prod_{n=0}^{N}(1+f_n(x))\right| \leq \prod_{n=0}^{N}(1+|f_n(x)|) \leq \exp\left(\sum_{n=0}^{n}|f_n(x)|\right) \leq \mathrm{e}^M.$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Pour une raison qui apparaîtra claire plus bas, on choisit $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Par convergence uniforme, soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N_0}^{+\infty} |f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in X$. On va montrer que la suite de fonctions

$$\left(\prod_n (1+f_n)\right)_n$$

est uniformément de Cauchy. Soient donc $p \geq q \geq N_0$ et $x \in X$. Toujours par le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned}\left|\prod_{n=0}^{p}(1+f_n(x)) - \prod_{n=0}^{q}(1+f_n(x))\right| &= \left|\prod_{n=0}^{q}(1+f_n(x))\right|\left|\prod_{n=q+1}^{p}(1+f_n(x)) - 1\right| \\ &\leq \mathrm{e}^M\left(\exp\left(\sum_{n=q+1}^{p}|f_n(x)|\right) - 1\right) \\ &\leq \mathrm{e}^M(\mathrm{e}^\varepsilon - 1).\end{aligned}$$

Mais comme $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, on a $\mathrm{e}^\varepsilon \leq 1 + 2\varepsilon$ (par une simple étude de fonction). Ainsi

$$\left|\prod_{n=0}^{p}(1+f_n(x)) - \prod_{n=0}^{q}(1+f_n(x))\right| \leq 2\varepsilon\mathrm{e}^M,$$

ce qui prouve bien la convergence uniforme du produit.

Enfin, si $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection alors, pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, $x \in X$, $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand et $M \in \mathbb{N}$ tel que $\{1, \ldots, N\} \subset \sigma(\{1, \ldots, M\})$, le calcul précédent montre que pour tout $x \in X$,

$$\left|\prod_{n=1}^{M}(1+f_{\sigma(n)}(x)) - \prod_{n=0}^{N}(1+f_n(x))\right| \leq 2\varepsilon\mathrm{e}^C,$$

ce qui justifie la convergence du produit $\prod_n (1+f_{\sigma(n)}(x))$ vers $f(x)$. La convergence est uniforme par la partie précédente de la démonstration car la série $\sum_n |f_{\sigma(n)}|$ converge également uniformément sur X. $\square$

Corollaire. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues (respectivement holomorphes) sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$. Si la série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω, alors le produit infini $\prod_n (1+f_n)$ converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction f continue (respectivement holomorphe) sur Ω qui vérifie*

$$Z(f) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Z(1+f_n).$$

De plus l'ordre d'un zéro de f est la somme (finie) des ordres de ce zéro pour les $1+f_n$.

Démonstration. Le premier point est clair par le théorème précédent, appliqué à tous les compacts $K \subset \Omega$, et au théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme de fonctions holomorphes. De même pour l'ensemble des zéros de f.

Il reste à voir l'ordre des zéros de f. Soit $z \in \Omega$ et soit K un voisinage compact de z dans Ω. Si $\{n \in \mathbb{N}, \exists s \in K, f_n(s) = -1\}$ était infini, on pourrait trouver une extractrice $(n_k)_k$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists z_k \in K, f_{n_k}(z_k) = -1$. Mais alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_{n_k}(z_k)|$ diverge, en contradiction avec la convergence normale de la série $\sum_n |f_n|$ sur K. Ainsi, tout point de Ω admet un voisinage dans lequel un nombre fini de f_n prend la valeur -1.

Soit $z \in \Omega$. Soit S la liste finie (éventuellement vide) des $n \in \mathbb{N}$ tels que $f_n(z) = -1$ et m la somme des ordres d'annulation des f_n en z, pour $n \in S$. Alors on a, sur un voisinage V de z, que seul les f_n avec $n \in S$ s'annulent sur V par le point précédent. On écrit alors, pour $N > \max(S)$ et $s \in V$,

$$\prod_{n=0}^{N} (1+f_n(s)) = (s-z)^m g(s) \prod_{n \leq N, n \notin S} (1+f_n(s)),$$

où g est une fonction holomorphe sur V.

Par convergence uniforme sur (un compact de) V, on a donc

$$\forall s \in V, f(s) = (s-z)^m h(s),$$

avec h holomorphe sur V, ce qui prouve que f s'annule à l'ordre m en z. $\square$

Passons à quelques exemples : La formule du produit eulérien nous redonne l'holomorphie de ζ sur $\{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$, ainsi que le fait que ζ ne s'annule pas sur cet ouvert.

Le produit de fonctions $\prod_n \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ et définit donc une fonction entière ψ. On a $\psi(z) = 0$ si et seulement si $z = \sqrt{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Le produit de fonctions $\prod_n \left(1 - \frac{a_n}{n^s}\right)$ converge uniformément sur tout compact du demi-plan de convergence absolue de la série de Dirichlet $F = \sum_n \frac{a_n}{n^s}$. Dans le demi-plan de convergence de F il y converge également ponctuellement.

5 Dérivée logarithmique d'un produit infini de fonctions holomorphes

D'après le théorème de Weierstrass sur la convergence de suites de fonctions holomorphes, si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes convergeant uniformément vers la fonction f sur tout compact de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, on a également convergence uniforme de la suite des dérivées $(f_n')_n$ vers f', toujours uniformément sur tout compact de Ω. En particulier on peut dériver les séries uniformément convergentes de fonctions holomorphes termes à termes. Cette dérivation est mal adaptée à nos produits infinis.

En effet, déjà pour deux termes $1 + f_1$ et $1 + f_2$ la dérivée de $F : z \mapsto (1 + f_1(z))(1 + f_2(z))$ en $z \in \Omega$ est $f_1'(z)(1 + f_2(z)) + (1 + f_1(z))f_2'(z)$, qui a une forme difficilement maniable telle quelle. Cependant, si l'on suppose $f_1(z) \neq -1$ et $f_2(a) \neq -1$, on trouve en divisant par $F(z)$ que

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{f_1'(z)}{1 + f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{1 + f_2(z)}.$$

Autrement dit la dérivée logarithmique (quand elle existe) d'un produit fini est la somme des dérivées logarithmiques ! Généralisons cela à nos produits infinis de fonctions holomorphes.

Théorème. *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes sur l'ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$ telle que la série $\sum_n f_n$ converge normalement sur tout compact de Ω. Notons F le produit des $(1+f_n)$ sur Ω. Alors la série de fonctions méromorphes $\sum_n \frac{f_n'}{1+f_n}$ converge normalement sur tout compact de Ω vers $\frac{F'}{F}$.*

Démonstration. Soient K un compact de Ω et $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+f_k)$ ne s'annule pas sur K, pour tout $k > n$. Un tel n existe toujours par convergence de la série $\sum_n f_n$ sur K. Pour $m > n$, posons $g_m : z \mapsto \prod_{k=n+1}^{m} (1+f_k(z))$, définie sur Ω. Alors pour tout $m > n$ et tout $z \in K$,

$$\frac{g_m'(z)}{g_m(z)} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)},$$

c'est-à-dire

$$g_m'(z) = g_m(z) \sum_{k=n+1}^{m} \frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)}.$$

La suite des g_m converge uniformément sur K vers $G = \frac{F}{(1+f_1)\dots(1+f_n)}$ par le théorème précédent, et la suite g_m' converge uniformément sur K vers G'. Ainsi on a pour tout $z \in K$,

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f_k'(z)}{1+f_k(z)}.$$

Mais on a également

$$\frac{G'}{G} = \frac{F'}{F} - \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k'}{1+f_k}$$

par dérivation logarithmique. Donc

$$\frac{F'}{F} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k'}{1+f_k} + \frac{G'}{G} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_k'}{1+f_k}$$

et la convergence est normale sur K au sens des fonctions méromorphes. □

Appliquons immédiatement ce théorème pour obtenir une formule précédemment citée.

Proposition. *La série de fonctions $\sum_n \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ converge normalement sur tout compact de $\Omega = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > 1\}$ vers $-\frac{\zeta'}{\zeta}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent au développement en produit eulérien de ζ :

$$\forall s \in \Omega, \zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

la convergence normale étant assurée par la condition $\Re(s) > 1$. Le calcul formal des dérivées logarithmiques a déjà été fait précédemment. On trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$$

pour $\Re(s) > 1$, et la convergence est normale sur tout compact. □

6 Zéros prescrits et théorème de factorisation de Weierstrass

Au vu des exemples précédents, il semble que l'on puisse, dans certains cas, construire une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ qui admet un nombre dénombrable (forcément, par le théorème des zéros isolés) de zéros prescrits à l'avance. Pour un nombre fini de complexes $z_1, \ldots, z_n$, il suffit de considérer le polynôme $z \mapsto \prod_{k=1}^{n}(z - z_n)$.

Pour une suite $(z_n)_n$ quelconque, on a envie de considérer le produit infini $z \mapsto \prod_n (z - z_n)$. Un premier problème apparaît, c'est que l'on ne sait pas aisément contrôler la convergence de ce produit. Le produit $\prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ semble être un meilleur candidat (on considère les z_n non nuls, quitte à multiplier ce produit par une puissance de z pour que la fonction s'annule à un ordre prescrit en 0). Mais encore une fois, on n'a pas toujours convergence du produit. Mais on peut déjà énoncer le résultat suivant.

Proposition. *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes non nuls tels que la série $\sum_n \frac{1}{z_n}$ converge absolument. Alors il existe une fonction entière s'annulant exactement en les z_n. De plus, l'ordre d'annulation de cette fonction en z_n vaut exactement le nombre (nécessairement fini) de fois que z_n apparaît dans la suite.*

Démonstration. On considère comme ci-dessus le produit

$$z \mapsto \prod_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Le théorème de convergence des produits de fonctions holomorphes nous donne que celui-ci converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$ vers une fonction holomorphe s'annulant exactement en les z_n. De plus, celui-ci nous donne également l'ordre d'annulation de cette fonction en chaque z_n, qui correspond bien au nombre d'indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $z_m = z_n$. □

Peut-on affaiblir la condition de convergence absolue de la série en question ? Pour cela, introduisons les facteurs élémentaires de Weierstrass, qui nous serviront également à démontrer le théorème de factorisation de Weierstrass.

Définition. Soit p un nombre entier. On définit le *p-ième facteur élémentaire de Weierstrass* comme la fonction entière

$$E_p : z \mapsto (1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right)$$

si $p \neq 0$, et

$$E_0 : z \mapsto 1 - z$$

sinon.

Remarque. On reconnaît dans la définition des facteurs élémentaires les sommes partielles du développement en série entière du logarithme. Ce n'est pas un hasard, car si z est petit en module (typiquement, $|z| < 1$), $\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}$ est « presque » égal à $-\log(1-z)$, d'où $E_p(z)$ est « presque » égal à 1. Remarquons de plus que pour tout $p \in \mathbb{N}$, E_p ne s'annule qu'en 1.

Passons à un lemme, qui va tout d'abord nous permettre de répondre à la question posée précédemment sur les zéros prescrits d'une fonction entière.

Lemme. *Pour tout complexe z de module inférieur à* 1 *et tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Démonstration. La formule est évidente pour $p = 0$. Soit maintenant $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on calcule

$$E_p'(z) = (1-z)\sum_{j=0}^{p-1} z^j \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) - \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right) = -z^p \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right).$$

Ainsi E_p' admet un zéro d'ordre p en 0. De plus, il est immédiat de vérifier que ses dérivées en 0 sont tous des réels négatifs. La primitive $z \mapsto 1 - E_p(z)$ de $-E_p'$

s'annulant en zéro, admet donc un zéro d'ordre $p+1$ en 0, et elle admet des coefficients positifs dans son développement en série entière autour de 0.

On définit maintenant la fonction $\varphi : z \mapsto \frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, qui se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$. Alors $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le principe du maximum, appliqué à φ sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$, nous donne

$$\forall z \in \mathbb{D}, |\varphi(z)| \leq \sup_{|z|=1} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \varphi(1) = 1,$$

ce qui nous donne bien l'inégalité voulue. $\square$

On en déduit alors le théorème suivant.

Théorème (des zéros prescrits). *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que $|z_n| \longrightarrow +\infty$ quand $n \to +\infty$. Soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers telle que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n} < +\infty$$

pour tout réel $r \geq 0$. Alors le produit infini

$$f : z \mapsto \prod_{n=0}^{+\infty} E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right)$$

est une fonction entière dont l'ensemble des zéros est $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et l'ordre d'un zéro de f est le nombre (fini) de fois qu'il apparaît dans la suite $(z_n)_n$.

Démonstration. Soient $r \geq 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $|z_n| \geq r$ pour tout $n \geq N$. Pour de tels n on a $\left| \frac{z}{z_n} \right| \leq 1$, et donc d'après le lemme précédent, on obtient

$$\left| 1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right| \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{p_n+1}.$$

Par convergence de la série

$$\sum_n \left(\frac{r}{|z_n|} \right)^{1+p_n},$$

on obtient la convergence normale de la série

$$\sum_n \left(1 - E_{p_n} \left(\frac{z}{z_n} \right) \right)$$

sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Par le théorème de convergence de produits infinis de fonctions holomorphes, on en déduit que P est une fonction entière, dont l'ensemble des zéros est exactement l'ensemble des zéros des $E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$. Le résultat sur la multiplicité est immédiat par ce même théorème. $\square$

Remarque. On peut choisir $p_n = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $|z_n| \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et donc $r \leq \frac{1}{2}|z_n|$ pour n assez grand.

Par exemple, on sait qu'il existe une fonction entière s'annulant exactement à l'ordre $n!$ en les $\exp\left(n^2 - \frac{1}{\sin(n)}\right)$... Ce n'est certes pas très intéressant, mais nous allons pouvoir maintenant passer au théorème de factorisation de Weierstrass.

Mais au fait, le théorème de factorisation de Weierstrass, c'est quoi ? On sait qu'un polynôme se factorise selon ses racines : si $P \in \mathbb{C}[X]$, et $z_1, \ldots, z_n$ sont les racines de P comptées avec multiplicités, alors P est égal (à une constante multiplicative près) au produit

$$\prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

On est très tenté de faire pareil pour les généralisations naturelles des polynômes sur $\mathbb{C}$, qui sont les fonctions entières. Cependant, celles-ci peuvent s'annuler une infinité de fois, et rien ne nous garantit l'existence d'une telle écriture.

Soyons fantaisiste et appliquons tout de même cette factorisation, comme l'a fait Euler en son temps, à la fonction sinus. Celle-ci s'annule exactement en les $n\pi$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Pour éviter le zéro 0 (haha...), et pour que les zéros soient de la forme n plutôt que $n\pi$, on considère la fonction $z \mapsto \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}$, qui se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}$. Euler dit alors (il le faisait pour des réels, mais rien n'empêche de le faire également sur $\mathbb{C}$, tant qu'on est dans la fantaisie)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n \in \mathbb{Z}^*} \left(1 - \frac{z}{n}\right) = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

en regroupant deux à deux les termes correspondant à n et à $-n$.

Alors, en développant formellement le produit, on trouve que le terme devant z^2 n'est autre que $-\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = -\zeta(2)$. En développant notre fonction analytique en série entière au voisinage de 0, on trouve que

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = 1 - \frac{\pi^2 z^2}{6} + \dots$$

Euler en déduit alors la célèbre formule $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Bien sûr, la méthode prête à rire aujourd'hui. Mais l'on peut justifier cet argument rigoureusement. Le fait est que le développement en produit de la fonction sinus trouvé par Euler est vrai !

Théorème (de factorisation de Weierstrass)**.** *Soient f une fonction entière ne s'annulant pas en 0, s'annulant au moins une fois et $(z_n)_n$ la suite de ses zéros comptés avec multiplicités. Alors il existe une suite d'entiers $(p_n)_n$ et une fonction entière g telles que*

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=0}^{+\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Démonstration. Si f n'a qu'un nombre fini de zéros $z_0, \dots, z_n$ c'est clair. Il suffit de prendre $p_k = 0$ pour tout $k \leq n$. Alors $z \mapsto \frac{f(z)}{\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\dots\left(1-\frac{z}{z_n}\right)}$ est une fonction entière ne s'annulant pas, et comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, c'est l'exponentielle d'une fonction entière g.

Sinon f a une infinité (dénombrable) de zéros et tendant vers l'infini (toujours par le théorème des zéros isolés). On peut donc supposer $(|z_n|)_n$ croissante. On prend $(p_n)_n$ et P comme dans le théorème des zéros prescrits. Alors la fonction $\frac{f}{P}$ est entière et ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, il existe g entière telle que $\frac{f}{P} = \mathrm{e}^g$. $\square$

Remarque. La condition f ne s'annule pas en 0 n'est pas restrictive. En effet si f admet un zéro d'ordre $k \geq 1$ en 0, il suffit d'appliquer le théorème précédent à $z \mapsto \frac{f(z)}{z^k}$. C'est justement ce que l'on va faire avec le sinus.

La fonction $z \mapsto \sin(\pi z)$ s'annule en 0 à l'ordre 1, et en les $n \in \mathbb{Z}$. Dans le théorème précédent, on se convainc facilement que l'on peut choisir $p_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, en groupant $E_0\left(\frac{z}{n}\right)$ et $E_0\left(\frac{z}{-n}\right)$, on trouve $\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$, dont la série associée $\sum_n \left(\frac{r}{n^2}\right)$ converge. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} E_0\left(\frac{z}{n}\right) E_0\left(-\frac{z}{n}\right) = \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

pour une certaine fonction entière g. Il reste à voir que la fonction e^g vaut identiquement 1 sur $\mathbb{C}$. Ce qui n'est pas facile... Un résultat de Borel nous permettrait de montrer que c'est bien le cas. Nous n'irons pas plus loin dans cette direction. En pratique, déterminer la fonction g du théorème est difficile.

Pour montrer le développement voulu, on va utiliser la méthode suivante. La fonction $P = z \mapsto z \prod_n \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ par les critère précédemment vus, et on peut calculer sa dérivée logarithmique termes à termes :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}, \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2zn^{-2}}{1 - z^2 n^{-2}} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Mais une formule classique [2] nous dit que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}, \frac{\pi}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Comme $z \mapsto \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$ n'est autre que la dérivée logarithmique de $z \mapsto \sin(\pi z)$, on en déduit que P est cette dernière fonction sont égale à une constante multiplicative près. [3] Or $\frac{f(z)}{z} \longrightarrow 0$ quand $z \to 0$ tandis que $\frac{\sin(\pi z)}{z} \longrightarrow \pi$ quand $z \to 0$. On en déduit que cette constante est π, c'est-à-dire $\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$ pour $z \in \mathbb{C}$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Une conséquence inattendue du théorème de factorisation de Weierstrass est le résultat suivante. Rappelons que si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre par le principe des zéros isolés.

Proposition. *Le corps des fractions de $\mathcal{H}(\Omega)$ est $\mathcal{M}(\Omega)$, le corps des fonctions méromorphes sur Ω.*

---

2. Cette formule peut être obtenue en utilisant astucieusement le théorème de Liouville : on montre que la différence de ces deux quantités est une fonction entière, 1-périodique et bornée dans les bandes verticales (c'est l'estimation difficile ici). Par Liouville, la différence est constante, et on détermine que cette constante vaut 0.

3. Si deux fonctions ont même dérivée, elles diffèrent d'une constante additive. Si elles ont même dérivée logarithmique, leurs logarithmes diffèrent d'une constante additive, et donc elles diffèrent d'une constante multiplicative.

Démonstration. Une inclusion est évidente, un quotient de fonctions holomorphes est méromorphe.

Soit maintenant f une fonction méromorphe sur Ω. Soit P l'ensemble de ses pôles. P est nécessairement dénombrable, sans quoi $\frac{1}{f}$ est identiquement nulle par le théorème des zéros isolés, absurde. Par le théorème de factorisation de Weierstrass, il existe une fonction g holomorphe sur Ω, s'annulant en les éléments de P avec multiplicité l'ordre du pôle correspondant. Alors la fonction $h = fg$ est holomorphe sur Ω, et $f = \frac{h}{g} \in \mathrm{Frac}(\mathcal{H}(\Omega))$. $\square$

Remarque. Pour pousser plus loin l'étude algébrique de $\mathcal{H}(\Omega)$, on peut remarquer qu'il ne s'agit jamais d'un anneau noethérien. En effet, soit $(z_n)_n$ une suite injective dans Ω. Alors la chaîne d'idéaux $I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n \subset \dots$ est strictement croissante, où $I_n = \{f \in \mathcal{H}(\Omega), f(z_0) = \cdots = f(z_n) = 0\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. De manière moins algébrique, on peut montrer qu'en tant qu'espace métrique, il n'est pas normable ! [4]

7 Quelques exemples

Passons maintenant à quelques exemples classiques de produits infinis qui n'ont pas encore été abordés. Je reviendrai aux démonstrations plus tard.

Proposition (Wallis)**.** *On a*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

Remarque. On pourrait utiliser la formule pour le sinus cardinal démontrée précédemment :

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(\pi/2)^2}{n^2\pi^2}\right),$$

qui nous donne

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2-1}{4n^2},$$

d'où par continuité de la fonction inverse,

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}.$$

4. Indication : utiliser le théorème de Montel et le théorème de Riesz sur la caractérisation des espaces vectoriels normés de dimension finie par la compacité de la boule unité.

Mais on va utiliser la méthode originale de Wallis, utilisant ses fameuses intégrales.

Démonstration. À venir. $\square$

Un des premiers exemples de produits infinis a été donné par Viète. Sa formule permettait également d'exprimer π en fonction d'un tel produit.

Proposition. *On définit la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par $u_0 = \sqrt{2}$ et pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Alors on a*

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2}.$$

Démonstration. À venir. $\square$

La formule suivante est due à Schlömlich.

Proposition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathrm{e}^{\frac{z}{n}},$$

où γ est la constante d'Euler.

Démonstration. À venir. $\square$

On peut également factoriser la fonction ζ de Riemann selon ses zéros ! On va pour cela utiliser la fonction $\xi : s \mapsto \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta\left(\frac{s}{2}\right)$, qui vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(s) = \xi(1-s)$ pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Proposition. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$\xi(s) = \mathrm{e}^{P(s)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \mathrm{e}^{\frac{s}{\rho}},$$

où $P(s) = (\log(2\pi) - 1 - \frac{\gamma}{2})s - \log(2)$ et γ est la constante d'Euler.

Démonstration. À venir. $\square$

Enfin, pour ce dernier exemple on va généraliser le développement en produit eulérien de la fonction ζ.

Proposition. *Soit f une fonction arithmétique multiplicative, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$ telle que $f(mn) = f(m)f(n)$ sir m et n sont premiers entre eux. Si f est bornée alors pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(p^n)}{p^{ns}} \right).$$

De plus, si f est complètement multiplicative, c'est-à-dire si $f(mn) = f(m)f(n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout nombre complexe s tel que $\Re(s) > 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{f(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Démonstration. À venir. $\square$

Ces développements interviennent notamment dans la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique [5].

5. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Alors il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p = a \mod b$

Références

[1] M. Audin, *Analyse complexe*, PDF disponible en ligne, 2007

[2] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1995

[3] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 2009

[4] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres - 4ème édition*, Belin, 2015