Géométrie affine réelle - Distance, isométries, angles, aires, convexité

Dans toute cette feuille, nous ne considérerons que des espaces affines réels.

1 Distance et isométries

Proposition 1.1. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine réel de dimension finie. Alors $\mathcal{E}$ est muni d'une topologie induite par la topologie canonique de $\overrightarrow{E}$ via une bijection $\overrightarrow{u} \mapsto A + \overrightarrow{u}$ entre $\overrightarrow{E}$ et $\mathcal{E}$. Celle-ci ne dépend pas du point $A \in \mathcal{E}$. Si $||\cdot||$ est une norme sur $\overrightarrow{E}$ alors*

$$(A, B) \mapsto ||\overrightarrow{AB}||$$

définit une distance sur $\mathcal{E}$. La topologie qui en découle est la ***topologie canonique*** *sur $\mathcal{E}$.*

Définition 1.2. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine réel de dimension finie. On dit qu'il s'agit d'un* ***espace affine euclidien*** *lorsque $\overrightarrow{E}$ est un espace euclidien. La distance euclidienne entre les points A et B de $\mathcal{E}$ est alors notée $|AB|$.*

Exercice 1. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien et $A, B \in \mathcal{E}$ distincts. Montrer que $I \in \mathcal{E}$ est le milieu de A et B si et seulement si $I \in (AB)$ et $|AI| = |BI|$.*

Proposition 1.3. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien et $A, B \in \mathcal{E}$. Alors l'ensemble des points à égales distances de A et B est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$, appelé* ***hyperplan médiateur*** *de A et B.*

Démonstration. En notant I le milieu de A et B, alors pour tout point $M \in \mathcal{E}$ on a

$$|AM|^2 = \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} \rangle = |AI|^2 + 2\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM} \rangle + |IM|^2$$

qui est égal à $|BM|^2$ si et seulement si $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM} \rangle = 0$, ce qui définit bien un hyperplan affine. □

Définition 1.4. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien. Une* ***isométrie*** *de $\mathcal{E}$ est une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ telle que pour tout $A, B \in \mathcal{E}, |AB| = |f(A)f(B)|$. Autrement dit, f est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f} \in O(\overrightarrow{E})$.*

Exemple 1.5.

1. Les translations sont des isométries.
2. Les **symétries centrales**, c'est-à-dire les homothéties de rapport -1, sont des isométries.
3. Les **symétries orthogonales** (relativement à deux sous-espaces affines $(\mathcal{F}, \overrightarrow{F})$ et $(\mathcal{G}, \overrightarrow{G})$ en somme orthogonale, c'est-à-dire que $\overrightarrow{F}$ est un supplémentaire orthogonal de $\overrightarrow{G}$ dans $\overrightarrow{E}$) sont des isométries.

4. ⚠ Les projections (orthogonales ou non) et les homothéties de rapport différent de 1 et -1 ne sont pas des isométries.

Les isométries des espaces affines euclidiens disposent d'une décomposition canonique.

Proposition 1.6. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie. Il existe un unique couple $(t, \tilde{f})$ où t est une translation et $\tilde{f}$ est une isométrie possédant un point fixe et tels que $f = t \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ t$.*

Démonstration. Supposons qu'un tel couple $(t, \tilde{f})$ existe et notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur associé à t. Alors on a $\overrightarrow{\tilde{f}} = \overrightarrow{f}$, et comme t et $\tilde{f}$ commutent, on obtient facilement $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

Si O est un point fixe de $\tilde{f}$ alors $f(O) = t(O)$ et donc $\overrightarrow{Of(O)} = \overrightarrow{u}$. Ainsi, pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{f(O)f(A)} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})(\overrightarrow{OA})$. Comme $\overrightarrow{f}$ est orthogonal, $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ et $\mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ sont en somme directe (orthogonale) et l'écriture ci-dessus est donc unique. On en déduit que la valeur de $\overrightarrow{u}$ est entièrement déterminée par f, et il en est donc de même de t, puis de $\tilde{f}$.

Pour l'existence, on écrit, pour un $A \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ et $\overrightarrow{v} \in \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$ et on pose t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Alors f et t^{-1} (qui est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$) commutent et il reste à voir que $\tilde{f} = t^{-1} \circ f$ a un point fixe. Mais alors f et $\tilde{f}$ ont la même partie linéaire et on $\overrightarrow{A\tilde{f}(A)} = \overrightarrow{v} \in \mathrm{im}(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\overrightarrow{E}})$. Ainsi il existe $O \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\tilde{f}(O)\tilde{f}(A)} + \overrightarrow{A\tilde{f}(A)} + \overrightarrow{\tilde{f}(A)O}$ d'où finalement $\overrightarrow{O\tilde{f}(O)} = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire que O est un point fixe de $\tilde{f}$. □

Remarque 1.7. Ainsi, l'étude des isométries affines se ramène à celle des isométries ayant un point fixe, c'est-à-dire des isométries vectorielles. On pourra en déduire la classification des isométries affines en dimension 2 et 3 plus loin.

Définition 1.8. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une isométrie. On dit que f est une **isométrie directe**, ou un **déplacement**, lorsque $\det \overrightarrow{f} > 0$ (ou ce qui revient au même, $\det \overrightarrow{f} = 1$). Dans le cas contraire, on dit que f est une **isométrie indirecte**, ou un **antidéplacement**.*

Remarque 1.9. Cela ne dépend pas de la base choisie pour calculer le déterminant.

Proposition 1.10. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien. L'ensemble des isométries de $\mathcal{E}$ forme un groupe pour la composition, noté $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ et l'ensemble des isométries directes en forme un sous-groupe distingué $\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$.*

Exercice 2. *Déterminer le quotient $\mathrm{Is}(\mathcal{E})/\mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathrm{Is}(\mathcal{E}) \simeq \overrightarrow{E} \rtimes \mathrm{O}(\overrightarrow{E})$ en fixant un point $O \in \mathcal{E}$ et en utilisant la caractérisation interne du produit semi-direct. Établir un produit semi-direct analogue impliquant $\mathrm{Is}_O(\mathcal{E})$ et $\mathrm{Is}^+_O(\mathcal{E})$, où l'indice O indique que l'on considère les isométries fixant O.*

2 Cas particuliers des dimensions 2 et 3

On rappelle les énoncés suivants :

Théorème 2.1. 1. *Si E est un espace euclidien de dimension 2 alors son groupe orthogonal est constitué des réflexions (symétrie orthogonale par rapport à une droite) et des rotations, avec pour matrice dans une base orthonormée de la forme*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$. Toute rotation est la composée de deux réflexions, et réciproquement.

2. *Si E est un espace euclidien de dimension 3 et f est une isométrie de E, alors ou bien f est une rotation par rapport à un axe et il existe une base orthonormée telle que la matrice de f dans cette base soit*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix},$$

ou bien c'est le cas de $-f$. Tout élément de $\mathrm{O}(E)$ est le produit d'au plus trois réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un plan).

Remarque 2.2. De manière générale, $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ est engendré par les réflexions, et seule la parité du nombre de réflexions est bien définie (de manière analogue à la signature pour la décomposition d'une permutation en produit de transpositions). Dans le cas de la dimension 3, on peut noter que les réflexions sont exactement les opposés de rotations d'angle π. Le nombre minimal de réflexions nécessaires pour décomposer une isométrie permet de les classifier plus précisément : avec 0 réflexion on a l'identité, avec 1 on a les... réflexions, avec 2 on a les rotations, et avec 3 on a $-\mathrm{id}$ et les antirotations.

Combiné avec la Proposition 1.6, cela mène à la classification des isométries affines en dimension 2 et 3, pour laquelle il faut de plus prendre en compte les éventuels points fixes.

Théorème 2.3. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien.*

1. *Si $\mathcal{E}$ est de dimension 2, les isométries f de $\mathcal{E}$ sont classifiées par :*
   (a) *Si f fixe trois points non alignés, alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.*
   (b) *Sinon, si f admet deux points fixes A et B alors f est la réflexion par rapport à la droite (AB).*
   (c) *Sinon, si f a un point fixe A, alors f est une rotation de centre A.*
   (d) *Sinon, f est une translation ou une* ***symétrie glissée*** *(composée d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation par un vecteur dans $\overrightarrow{\mathcal{D}}$).*
2. *Si $\mathcal{E}$ est de dimension 3, les isométries f de $\mathcal{E}$ sont classifiées par :*
   (a) *Si f fixe quatre points non coplanaires, alors $f = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.*
   (b) *Sinon, si f admet trois points fixes A, B et C non alignés alors f est la réflexion par rapport au plan (ABC).*
   (c) *Sinon, si f a deux points fixes A et B alors f est une rotation d'axe (AB).*
   (d) *Sinon, si f a un point fixe A alors f est une antirotation (A est point fixe et $\overrightarrow{f}$ est l'opposé d'une rotation).*

(e) *Sinon, f est une translation, une symétrie glissée (composée d'une réflexion de plan $\mathcal{P}$ et d'une translation par un vecteur dans $\overrightarrow{P}$) ou un* ***glissage*** *(composée d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation par un vecteur dans $\mathcal{D}$).*

Remarque 2.4. Dans chacun des cas ci-dessus, on ajoute une réflexion pour passer d'un type d'isométrie au suivant.

Exercice 3. *Représenter sur un dessin l'action de chaque type d'isométrie du plan.*

3 Angles dans le plan

Dans cette section, $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ est un plan euclidien. On suppose que l'on a construit l'exponentielle complexe à partir de sa série entière, et établi ses propriétés fondamentales (notamment, l'existence des fonctions cos et sin, la 2π-périodicité et la surjectivité sur le cercle unité).

Proposition 3.1. *Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{E}$ sont non nuls, il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ tel que*

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||}.$$

On l'appelle la ***mesure d'angle non orienté*** *défini par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.*

Remarque 3.2. ⚠ Ici l'angle est non orienté car le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ mène au même angle que le couple $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$. On parle aussi d'**angle géométrique** concernant l'angle formé par deux demi-droites dirigées par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Pour parler de (mesure) d'angle orienté, il va falloir orienter le plan, c'est-à-dire fixer une base orthonormée.

Proposition 3.3. *Le groupe $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$ agit simplement transitivement sur le cercle unité de $\overrightarrow{E}$.*

Démonstration. Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ une base orthonormée de $\overrightarrow{E}$ et soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ des vecteurs unitaires de $\overrightarrow{E}$. Puisque $||\overrightarrow{u}||^2 = 1$, il existe un unique réel $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ tel que $\overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{x} + \sin\theta\overrightarrow{y}$ et donc la rotation d'angle θ envoie $\overrightarrow{x}$ sur $\overrightarrow{u}$. De même, on trouve un unique $\theta_2 \in [0, 2\pi]$ envoyant $\overrightarrow{x}$ sur $\overrightarrow{v}$. Alors la rotation d'angle $\theta_2 - \theta_1$ envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ et on a l'unicité car une rotation possédant un point fixe est l'identité. □

Définition 3.4. *Un* ***angle orienté*** *est l'orbite d'un couple de vecteurs unitaires dans $\overrightarrow{E}$ sous l'action de $\mathrm{SO}(\overrightarrow{E})$.*

Remarque 3.5. ⚠ La terminologie est trompeuse car cette notion ne nécessite pas d'orienter $\overrightarrow{E}$. Par contre c'est la mesure de cet angle qui dépendra d'une orientation.

Définition 3.6. *On dira que $\overrightarrow{E}$ est* ***orienté*** *lorsqu'on en a fixé une base orthonormée. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{y} \in \overrightarrow{E} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Si $\overrightarrow{E}$ est orienté, alors la* ***mesure de l'angle orienté*** *$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, notée $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$, est l'unique réel $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que la rotation d'angle θ envoie $\frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||}$ sur $\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.*

Remarque 3.7. [Fondamentale] Il est nécessaire d'orienter le plan pour que cette définition ait un sens, car si on passe d'une base orthonormée à une autre par une matrice de passage à déterminant négatif (en fait c'est nécessairement une matrice de réflexion), alors l'angle θ de la rotation devient $-\theta$, à cause du calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_{-\theta}.$$

C'est véritablement la notion de l'angle d'une rotation qui n'est pas bien définie sans orienter le plan.

Définition 3.8. *On dira que $\mathcal{E}$ est* ***orienté*** *lorsque $\overrightarrow{E}$ l'est (cela revient à se donner un repère affine orthonormée de $\mathcal{E}$). Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ deux à deux distincts. Si $\mathcal{E}$ est orienté, la* ***mesure d'angle orienté*** *$\widehat{ABC}$ est $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.*

On définit de manière similaire les angles et mesures d'angles orientés de droites orientées sécantes (c'est-à-dire dont on a choisi un vecteur directeur unitaire) ou, ce qui revient au même, de demi-droites de même base.

Une fois que l'on a établi tout ceci, on peut retrouver toutes les propriétés usuelles sur les angles, comme l'existence et l'unicité d'une bissectrice de deux demi-droites ou encore la relation de Chasles sur les angles orientés.

Proposition 3.9 (Relation de Chasles)**.** *Si $\mathcal{E}$ est orienté, $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ sont deux à deux distincts alors $\widehat{ABC} + \widehat{CBD} \equiv \widehat{ABD} \bmod 2\pi$.*

Autrement dit, les mesures modulo 2π d'angles orientés de deux demi-droites sécantes en un point B donné sont munies d'une structure de groupes pour l'addition, isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dans la suite, on identifiera automatiquement une mesure d'angle orienté et sa classe modulo 2π.

Proposition 3.10. *Les isométries de $\mathcal{E}$ préservent les angles non orientés. Si $\mathcal{E}$ est orienté, ses isométries directes préservent les mesures d'angles orientés, tandis que ses isométries indirectes les transforment en leur opposé modulo 2π.*

Remarque 3.11. Plus généralement, les applications affines préservant les angles sont les **similitudes**, composées d'une homothétie et d'une isométrie. Elles sont directes ou indirectes selon si l'isométrie en question l'est. En complexes, les similitudes directes correspondent à la multiplication par un nombre complexe $z_0 = re^{i\theta}$, et matriciellement elles correspondent aux matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ non tous nuls. Les applications holomorphes ont la propriété d'être exactement les applications différentiables du plan dont la différentielle en tout point est une similitude directe (équations de Cauchy-Riemann). On dit qu'elles sont **conformes**, car elles préservent les (mesures d')angles (orientés) infinitésimaux, c'est-à-dire les angles formés par les dérivées de deux courbes régulières sécantes.

4 Géométrie du triangle

Dans cette section, $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ est un plan affine euclidien orienté. On va établir des propriétés remarquables des triangles. Dans toute la suite, ABC est un triangle de $\mathcal{E}$ non plat, et il sera fortement recommandé de tracer des figures pour chaque démonstration.

Théorème 4.1. *Dans le triangle ABC, les droites remarquables suivantes sont concourantes :*

1. *Les médianes se coupent en l'isobarycentre.*
2. *Les bissectrices se coupent en le centre du cercle inscrit au triangle.*
3. *Les médiatrices se coupent en le centre du cercle circonscrit.*

4. *Les hauteurs se coupent en un point appelé l'orthocentre.*

Démonstration. 1. Déjà vu en utilisant l'associativité du barycentre.

2. Le théorème de Pythagore (dans la version disant que la distance d'un point à une droite est égale à la distance de ce point à son projeté orthogonal) donne que la bissectrice issue de A est constituée des points à égale distance de (AB) et de (AC). Le point d'intersection de deux bissectrices de ABC est donc à égale distance de $(AB), (AC)$ et (BC), donc également sur la troisième bissectrice. Le cercle centrée en ce point d'intersection et de rayon cette distance est alors inscrit dans ABC.

3. Le point d'intersection de deux médiatrices est à égale distance des trois sommets, donc sur la troisième médiatrice, et le cercle centré en ce point et passant par l'un des sommets passe par les trois.

4. On construit un triangle $A'B'C'$ dont les médiatrices sont les hauteurs de ABC. Pour ce faire, considérons l'homothétie h de centre le centre de gravité G du triangle et de rapport -2, et appelons $A' = h(A), B' = h(B)$ et $C' = h(C)$. Si I est le milieu de $[BC]$, on a vu que $2\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{0}$ et donc $h(I) = A$ est le milieu de $[h(B)h(C)] = [B'C']$, et de même pour les autres milieux. Les médiatrices de $A'B'C'$ sont donc les hauteurs de ABC car (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, et donc ces hauteurs sont concourantes. □

On prend désormais la convention suivante : si ABC est un triangle de $\mathcal{E}$, alors on note $a = |BC|, b = |AC|, c = |AB|, \alpha = \widehat{CAB}, \beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$, où le plan est orienté de sorte que $\alpha, \beta, \gamma \in]0, \pi[$.

Définition 4.2. *On dit que ABC est :*

1. ***isocèle*** *en A lorsque $b = c$.*
2. ***équilatéral*** *lorsque $a = b = c$.*
3. ***rectangle*** *en A (respectivement B, C) lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (respectivement $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$). On dit alors que l'angle est* ***droit****.*

Remarque 4.3. ⚠ La mesure d'angle orientée d'un angle droit peut aussi valoir $-\frac{\pi}{2}$ dans une autre orientation !

Proposition 4.4 (SOH-CAH-TOA)**.** *Si ABC est rectangle en B alors $\sin\alpha = \frac{a}{b}, \cos\alpha = \frac{c}{b}$ et $\tan\alpha = \frac{a}{c}$.*

Démonstration. Par définition, $\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle}{bc}$. Mais comme B est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = c^2$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle α. Notons $D = r^{-1}(C)$. Alors $|AD| = |AC| = b$. Soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $(A, \frac{\overrightarrow{AD}}{b}, \frac{\overrightarrow{AE}}{b})$ soit un repère orthonormé direct. Alors $C = r(D)$ et ses coordonnées dans ce repère sont $(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$. Puisque le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) est B, on a bien $b\sin\alpha = |BC|$ d'où $\sin\alpha = \frac{a}{b}$. Le dernier résultat vient de la définition de tan. □

Proposition 4.5. *On a $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.*

Démonstration. Soit $D \in \mathcal{E}$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme (c'est-à-dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$) et soit $A', C' \in \mathcal{E}$ tels que $A' \in (AB)$ et $B \in [AA']$, $C' \in (CB)$ et $B \in [CC']$. Alors on a les égalités de mesures d'angles orientées suivantes :

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}}), \quad \beta = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BA'}}), \quad \gamma = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}}).$$

En sommant, on obtient $\alpha+\beta+\gamma = (\widehat{\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BC}}) = \pi$. □

Théorème 4.6 (d'Al-Kashi ou loi des cosinus)**.** *On a* $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$.

En particulier, ABC *est rectangle en* C *si et seulement si* $a^2+b^2=c^2$ *(théorème de Pythagore).*

Démonstration. Il suffit de développer

$$c^2 = \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle = b^2 + 2\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\rangle + a^2$$

et de constater que $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\rangle = -\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\rangle = -ab\times\cos(\gamma)$. □

Corollaire 4.7. *Si* ABC *est équilatéral alors* $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

Lemme 4.8. *Soit* $\mathcal{C}$ *un cercle tel que* $[AC]$ *en soit un diamètre. Alors pour tout* $B\in\mathcal{C}\setminus\{A,C\}$, *le triangle* ABC *est rectangle en* B.

Démonstration. Soit O le centre de $\mathcal{C}$ et $D\in\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ soit orthogonale. Quitte à appliquer l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{|OA|}=\frac{1}{|OD|}$, on peut supposer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ soit orthonormée. Alors, si l'on note θ la mesure d'angle orientée $\widehat{AOB}$, on a $\overrightarrow{OB} = (\cos\theta)\overrightarrow{OA} + (\sin\theta)\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$. On calcule alors $|BA|^2 = (1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 2-2\cos\theta$ et $|BC|^2 = (1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta = 2+2\cos\theta$, de sorte que $|BA|^2+|BC|^2 = 4 = |AC|^2$, d'où le résultat par la réciproque du théorème de Pythagore. □

Lemme 4.9. *Le triangle* ABC *est isocèle en* A *si et seulement si* $\beta=\gamma$.

Démonstration. Supposons que ABC est isocèle en A. Alors la médiane issue de A est également la médiatrice issue de A, et donc la symétrie orthogonale d'axe cette médiatrice envoie B sur C et C sur B. Comme il s'agit d'une isométrie négative, on obtient $\widehat{CBA} = -\widehat{BCA} = \widehat{ABC}$, c'est-à-dire $\beta=\gamma$.

Réciproquement, si $\beta=\gamma$ et si par exemple $|AB|\geq|AC|$, soit $D\in[AB]$ tel que $|BD| = |CD|$ et montrons que $D=A$. Puisque BCD est isocèle en D, on a $\widehat{DBC}=\widehat{BCD}$. Or $\widehat{DBC}=\beta$ donc $\widehat{BCD}=\gamma$ et on obtient que $D\in(AC)$ et finalement que $D=A$, et donc ABC est isocèle en A. □

Théorème 4.10 (de l'angle inscrit ou de l'angle au centre)**.** *Soit* $\mathcal{C}$ *un cercle de centre* $O\in\mathcal{E}$. *Alors pour tout* $A,B,C\in\mathcal{C}$, *on a*

$$(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}}) = 2\alpha.$$

Démonstration. Posons A' le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$. Alors le triangle $A'OB$ est isocèle en O et par la relation entre les angles de ce triangle, on trouve $(\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}}) = \pi - 2(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA'}})$. Or $AA'B$ est rectangle en B, donc $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}}) = \frac{\pi}{2}$ d'où $(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA'}}) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}})$. Le triangle OBA est également isocèle en O, donc on a $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}}) = (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}})$, d'où finalement $(\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AB}})$. De la même manière, on montre que $(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA'}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'}})$ d'où le résultat en sommant. □

Théorème 4.11 (Loi des sinus)**.** *On a* $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et D le point diamétralement opposé à A sur $\mathcal{C}$. Le théorème de l'angle inscrit appliqué avec ABC et ABD donne que $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}})$. Mais comme ABD est rectangle en D, on obtient $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$, où R est le rayon du cercle circonscrit. Ainsi $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$. La même démonstration montre que $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$ et $\frac{b}{\sin\beta} = 2R$. □

On déduit des relations précédentes les cas de similitudes des triangles.

Théorème 4.12. *Deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan sont semblables (dans la même orbite sous l'action des similitudes planes) si et seulement si l'un des propriétés suivantes est vérifiée :*

1. *Leurs longueurs de côtés sont proportionnelles, c'est-à-dire que* $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$.
2. *Deux de leurs angles orientés sont égaux.*
3. *Deux de leurs côtés ont des longueurs proportionnelles deux à deux et l'angle orienté définis par ces côtés sont égaux.*

Remarque 4.13. En imposant de plus l'égalité d'une longueur de côté, on retrouve les cas d'isométries des triangles, et en imposant les mesures d'angles orientés, les cas d'isométries positives.

5 Notion d'aire

Dans cette section, on suppose connue la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ et son interprétation en termes de volume. Tout comme pour la topologie canonique, la mesure de Lebesgue se transporte également à $\mathcal{E}$ via $\overrightarrow{E}$.

Proposition 5.1. *Soit $ABCD$ un parallélogramme. Notons h la hauteur de D à (AB) et $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme (dans le plan qu'il engendre). Alors $\mathcal{A} = h|AB| = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.*

Démonstration. Soit E le projeté orthogonal de D sur (AB). Alors $|DE| = h$ et si l'on note $F = B + \overrightarrow{AE}$ alors $BFC = AED + \overrightarrow{AB}$. Par invariance de la mesure de Lebesgue par translation, les triangles BFC et AED ont la même aire. De plus, $EFCD$ est un rectangle, d'aire $|EF|.|ED|$ par définition de la mesure de Lebesgue dans le plan, c'est-à-dire $h.|AB|$. Par additivité de la mesure de Lebesgue, on obtient finalement $\mathcal{A} = \lambda(ABCD) + \lambda(BFC) - \lambda(AED) = \lambda(EFCD) = h|AB|$.

Notons B' l'image de B par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A. Alors $\overrightarrow{AB'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et donc colinéaire à $\overrightarrow{AD}$. Ainsi $|\langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB'} \rangle| = h|AB'| = h|AB|$. Dans le repère $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|}, \frac{\overrightarrow{AB'}}{|AB'|}\right)$, si B a pour coordonnées (x_1, y_1) et D a pour coordonnées (x_2, y_2) alors les coordonnées de B' sont $(-y_1, x_1)$ et finalement $\mathcal{A} = |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$. □

Remarque 5.2. On peut aussi définir la notion de volume orienté d'un parallélotope dans $\mathbb{R}^n$ à l'aide du déterminant et montrer que sa valeur absolue coïncide avec la mesure de Lebesgue.

Corollaire 5.3. *Soit ABC un triangle. Son aire est égale à $\frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.*

Démonstration. Si l'on note $D = B + \overrightarrow{AC}$ alors $ABCD$ est un parallélogramme et BDC est un triangle semblable à ABC puisqu'ils partagent les trois même longueurs de côtés. Par additivité de la mesure de Lebesgue, et le fait que l'aire de $ABCD$ soit égale à $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$, on a le résultat. □

Exercice 4. *Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires de l'espace. Montrer que le volume du tétraèdre qu'ils définissent est $\frac{h\mathcal{A}}{3}$, où $\mathcal{A}$ est l'aire de l'une des faces et h est la hauteur relative à cette face. En déduire que ce volume vaut $\frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.*

6 Convexité

Dans cette section, $\mathcal{E}$ est un espace affine réel.

Définition 6.1. *Soit $A, B \in \mathcal{E}$. Le* ***segment*** *$[AB]$ est*

$$\{\mathrm{Bar}((A,t),(B,1-t)) \mid t \in [0,1]\}.$$

Une partie C de $\mathcal{E}$ est ***convexe*** *lorsque $\forall A, B \in C, [AB] \subset C$.*

Exemple 6.2.

1. Tout sous-espace affine de $\mathcal{E}$ est convexe.

2. Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de $\mathcal{E}$, il existe une forme affine non nulle $\varphi : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(\{a\})$. Alors le **demi-plan** $\varphi^{-1}([a, +\infty[)$ est convexe.

3. Si $\mathcal{E}$ est euclidien, une boule $B(A,r) = \{B \in \mathbb{R}^n \mid |AB| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ est convexe mais une sphère $S(A,r) = \{B \in \mathbb{R}^n \mid |AB| = r\} \subset \mathbb{R}^n$ n'est jamais convexe (pour $r > 0$).

Définition 6.3. *Une* ***combinaison convexe*** *des points $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}$ est un barycentre de $A_1, \ldots, A_n$ avec des poids $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.*

Proposition 6.4. *Soit C une partie de $\mathcal{E}$. Alors C est convexe si et seulement si C est stable par combinaisons convexes.*

Proposition 6.5. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$. Alors $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.*

Définition 6.6. *Soit A une partie non vide de $\mathcal{E}$. L'****enveloppe convexe*** *de A est*

$$\mathrm{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ A \subset C}} C.$$

C'est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie convexe de $\mathcal{E}$ contenant A.

Exemple 6.7.

1. Si $A, B \in \mathcal{E}$ alors $\mathrm{Conv}(\{A, B\}) = [AB]$.

2. Si $A, B, C \in \mathcal{E}$ ne sont pas alignés alors $\mathrm{Conv}(\{A, B, C\})$ est un triangle plein.

Théorème 6.8 (Carathéodory)**.** *Supposons que $\mathcal{E}$ est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit A une partie non vide de $\mathcal{E}$. Alors pour tout point $M \in \mathrm{Con}(A)$, il existe $n+1$ points $A_0, \ldots, A_n$ tel que M est combinaison convexe de $A_0, \ldots, A_n$.*

Exercice 5. *Soit A une partie compacte non vide de $\mathcal{E}$ de dimension n. Alors $\mathrm{Conv}(A)$ est compacte.*

Définition 6.9. *Soit C un convexe de $\mathcal{E}$. Un point $x \in C$ est appelé* ***point extrémal*** *lorsque $C \setminus \{x\}$ est convexe. On note $\mathrm{Ext}(C)$ l'ensemble de ses points extrémaux.*

Exercice 6. *Un convexe non vide admet-il toujours des points extrémaux ?*

Exercice 7. *Montrer qu'un point de C est extrémal si et seulement il ne peut s'exprimer comme combinaison convexe stricte d'éléments de C, si et seulement s'il n'est le milieu d'aucune paire de points distincts de C. En déduire que si f est une bijection affine et C est un convexe de $\mathcal{E}$, alors* $\mathrm{Ext}(f(C)) = f(\mathrm{Ext}(C))$.

Définition 6.10. *Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$. On appelle **groupe d'isométries** de $\mathcal{P}$, et on note $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$, l'ensemble des isométries affines f de $\mathcal{E}$ telles que $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.*

Proposition 6.11. *Si $\mathcal{E}$ est euclidien et $\mathcal{P}$ est une partie non vide de $\mathcal{E}$ alors $\mathrm{Is}(\mathcal{P})$ est un groupe pour la composition et $\mathrm{Is}^+(\mathcal{P}) = \mathrm{Is}(\mathcal{P}) \cap \mathrm{Is}^+(\mathcal{E})$ en est un sous-groupe distingué d'indice au plus 2.*

Théorème 6.12. *Supposons que $\mathcal{E}$ est euclidien de dimension 3.*

1. *Si Δ est un tétraèdre régulier alors $\mathrm{Is}(\Delta) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{Is}^+(\Delta) \simeq \mathfrak{A}_4$.*
2. *Si $\mathcal{C}$ est un cube de $\mathcal{E}$ alors $\mathrm{Is}(\Delta) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathrm{Is}^+(\Delta) \simeq \mathfrak{S}_4$.*

Autres thèmes en rapport avec la convexité : fonctions convexes, hyperplan d'appui, théorème de Hahn-Banach géométrique, projection dans les espaces de Hilbert, théorème de Markov-Kakutani, théorème du point fixe de Schauder, théorème de Krein-Milman...

7 Exercices

Exercice 8. *On considère le plan affine réel $\mathbb{C}$ muni de son repère affine orthonormé $(0, 1, i)$. Soit z_1, z_2, z_3, z_4 des point distincts de $\mathbb{C}$.*

1. *Exprimer la longueur $|z_1 z_2|$, la mesure d'angle orientée $\widehat{z_2 z_1 z_3}$.*
2. *Exprimer le produit scalaire $\langle \overrightarrow{z_1 z_2}, \overrightarrow{z_1 z_3} \rangle$ et le déterminant $\det_{(1,i)}(\overrightarrow{z_1 z_2}, \overrightarrow{z_3 z_4})$.*
3. *Montrer que z_1, z_2, z_3 sont alignés si et seulement si $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}$.*
4. *Montrer que si z_1, z_2, z_3, z_4 ne sont pas alignés, alors ils sont sur un même cercle si et seulement si le birapport $\dfrac{\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right)}{\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)}$ est réel.*

Exercice 9. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine réel de dimension finie et K un compact de $\mathcal{E}$ d'intérieur non vide.*

1. *Montrer que le point*
$$A + \frac{1}{\lambda(K)} \int_{\mathcal{E}} \mathbf{1}_K(x) \overrightarrow{Ax} \, \mathrm{d}\lambda(x)$$
*a bien un sens et ne dépend pas du point $A \in \mathcal{E}$. On appelle ce point le **centre** de K.*
2. *Montrer que le centre de K est invariant par les éléments $f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E})$ tels que $f(K) = K$.*
3. *En déduire que $\{f \in \mathrm{GA}(\mathcal{E}) \mid f(K) = K\}$ est un compact de $\mathrm{GA}(\mathcal{E})$.*

Exercice 10. *Soit $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ un espace affine euclidien et $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui préserve les distances. On va montrer que f est affine, et donc est une isométrie de $\mathcal{E}$. On fixe un point $O \in \mathcal{E}$.*

1. *Justifier que pour tout $M, M' \in \mathcal{E}$, on a* $\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle = \frac{1}{2}(|OM|^2 + |OM'|^2 - |MM'|^2)$, *puis que* $\langle \overrightarrow{f(O)f(M)}, \overrightarrow{f(O)f(M')} \rangle = \langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'} \rangle$.

2. *En déduire que l'application* $f_O : \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{f(O)f(O+\overrightarrow{u})}$ *préserve les normes dans* $\overrightarrow{E}$.

3. *Soit* $\varphi : \overrightarrow{E} \to (\overrightarrow{E})'$ *définie par* $\varphi(\overrightarrow{u})(\overrightarrow{v}) = \langle f_O(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle$. *Montrer que* φ *est linéaire. (Indication : Commencer par prendre* $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(f_O(\overrightarrow{E}))$ *puis étudier ce qu'il se passe sur l'orthogonal de ce sous-espace vectoriel.)*

4. *En utilisant l'isomorphisme canonique entre* $\overrightarrow{E}$ *et* $(\overrightarrow{E})'$ *provenant de la structure euclidienne, montrer que* f_O *est linéaire et conclure.*

Remarque. Le théorème de Mazur-Ulam énonce plus généralement que toute surjection isométrique entre espaces vectoriels normées réels est affine.

Exercice 11. *Soit* $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ *un plan euclidien et* ABC *un triangle non plat de* $\mathcal{E}$. *On note* O *le centre de son cercle circonscrit (dont on rappelle qu'il est le point d'intersection des médiatrices),* G *son isobarycentre (point d'intersection des médianes) et* H *son orthocentre (point d'intersection des hauteurs).*

1. *Soit* X *le point tel que* $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. *Montrer que* $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OI}$, *où* I *est le milieu de* $[BC]$.

2. *En déduire que* X *appartient à la hauteur* h_A *issue de* A.

3. *De la même manière,* X *appartient aux hauteurs* h_B *et* h_C *issues de* B *et* C *respectivement. En déduire que* $X = H$.

4. *Montrer que* O, G *et* H *sont alignés. La droite les contenant est appelée la* ***droite d'Euler*** *de* ABC.

Exercice 12. *Soit* $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$ *un plan euclidien orienté et* ABC *un triangle orienté non plat.*

1. *Justifier que l'aire délimitée par* ABC *vaut* $S = \frac{1}{2}ah_a$, *où* h_a *est la longueur* $|AI|$, *où* I *est le point d'intersection entre la hauteur issue de* A *et le côté* $[BC]$.

2. *Montrer que* $\sin \widehat{ABI} = \sin \beta$.

3. *En déduire que* $h_a = c \sin \beta$.

4. *On a donc* $S = \frac{1}{2}ac \sin \beta$, *et de même* $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$. *Retrouver la loi des sinus.*

5. *Exprimer* $\cos \alpha$ *à l'aide du théorème d'Al-Kashi.*

6. *En utilisant que* $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, *obtenir une formule pour* S *ne faisant intervenir que les longueurs* a, b *et* c.

Remarque. En posant $p = \frac{a+b+c}{2}$ le **demi-périmètre** de ABC, on peut réécrire cela sous la forme $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (**formule de Héron**).

Exercice 13. *Soit* ABC *un triangle non aplati d'un plan euclidien* $(\mathcal{E}, \overrightarrow{E})$.

1. *Soit A' le projeté orthogonal de A sur (BC). Exprimer les coordonnées barycentriques de A' dans le repère (B, C).*

2. *Les formules pour les projetés orthogonaux B' et C' de B sur (AC) et C sur (AB) respectivement sont symétriques. En déduire que les coordonnées barycentriques de l'orthocentre de ABC dans le repère (A, B, C) sont $(\tan\alpha : \tan\beta : \tan\gamma)$.*

3. *Soit I, J, K les milieux respectifs de $[BC], [AC]$ et $[AB]$. Montrer que les médiatrices de ABC sont les hauteurs de IJK.*

4. *En déduire que les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit à ABC dans le repère (I, J, K) sont $(2\tan\alpha : 2\tan\beta : 2\tan\gamma)$.*

5. *Montrer que les coordonnées barycentriques du centre du cercle circonscrit à ABC dans le repère (A, B, C) sont $(\tan\beta + \tan\gamma : \tan\alpha + \tan\gamma : \tan\alpha + \tan\beta)$.*

Exercice 14.

1. *Montrer que les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont cycliques. A quel groupes d'isométries positives correspondent-ils ?*

2. *Montrer que les sous-groupes finis de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ sont soit cycliques, soit diédraux.*

Exercice 15. *Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'ordre $n \geq 2$.*

1. *Si $g \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$, justifier que g possède deux points fixes sur la sphère unité $\mathbb{S}^2$.*

2. *On note X l'ensemble de ces points fixes. Justifier que $2 \leq |X| \leq 2(n-1)$ et que X est stable par G.*

3. *Démontrer que le nombre d'orbites pour l'action de G sur X est 2 ou 3.*

4. *Montrer que si le nombre d'orbite est 2 alors ces orbites sont triviales et G est cyclique.*

5. *Supposons maintenant qu'il y a trois orbites X_1, X_2 et X_3. Montrer que G n'est pas cyclique, puis en notant $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ les cardinaux des stabilisateurs des orbites de X_1, X_2 et X_3 respectivement, montrer que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{n}$.*

6. *En déduire que $n_1 = 2$, $(n_2, n_3) \in \left\{\left(2, \frac{n}{2}\right), (3,3), (3,4), (3,5)\right\}$.*

7. *Dans le cas où $(n_2, n_3) = \left(2, \frac{n}{2}\right)$, montrer que $G \simeq \mathcal{D}_{n/2}$.*

8. *Dans le cas où $(n_2, n_3) = (3,3)$, montrer que $n = 12$. En considérant l'action de G sur X_2, montrer que $G \simeq \mathfrak{A}_4$.*

9. *Dans le cas où $(n_2, n_3) = (3,4)$, montrer que $n = 24$. Montrer que G agit sur les paires de points opposés dans X_2 et montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_4$.*

10. *Dans le cas où $(n_2, n_3) = (3,5)$, montrer que $n = 60$, puis déterminer les sous-groupes de G. En déduire $G \simeq \mathfrak{A}_5$ (on pourra admettre qu'un groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathfrak{A}_5$).*

Remarque. La classification ci-dessus correspond à la liste des solides platoniciens, c'est-à-dire des polyèdres réguliers convexes dans l'espace. Le groupe $\mathfrak{A}_4$ est le groupe d'isométries positives du tétraèdre, $\mathfrak{S}_4$ est le groupe d'isométries positives du cube et de son dual l'octaèdre, et $\mathfrak{A}_5$ est le groupe d'isométries positives de l'icosaèdre et de son dual le dodécahèdre.