
Anneaux, idéaux, quotients et morphismes

Quelques références bibliographiques pour l'algèbre commutative :

- *Cours d'algèbre*, D. Perrin, Ellipses.
 - *Algèbre - Le grand combat*, G. Berhuy, Calvage & Mounet.
 - *Algèbre*, S. Lang, Dunod.
 - *Éléments de la théorie des anneaux : Anneaux commutatifs*, J. Calais, Ellipses.
-

Les anneaux sont des structures mathématiques qui permettent notamment de généraliser les principes arithmétiques de \mathbb{Z} et la structure de fonctions régulières sur une variété (point de départ de la géométrie algébrique).

1 Généralités sur les anneaux

Définition 1.1. Un **anneau** (associatif unitaire) est un quintuplet $(A, +, \times, 0, 1)$ où A est un ensemble et :

1. $(A, +, 0)$ est un groupe abélien.
2. $\times : A \times A \rightarrow A$ est une loi de composition interne associative, d'élément neutre 1.
3. \times est distributive à gauche et à droite sur $+$:

$$\forall x, y, z \in A, x \times (y + z) = x \times y + x \times z \text{ et } (x + y) \times z = x \times z + y \times z.$$

L'anneau est dit **commutatif** lorsque la loi \times est commutative : $\forall x, y \in A, x \times y = y \times x$. Un élément $x \in A$ est dit **inversible**, et on note alors $x \in A^\times$ lorsqu'il existe $y \in A$ tel que $x \times y = y \times x = 1$. On dit que A est un **anneau à division** lorsqu'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et tout élément non nul est inversible. Enfin, on dit que c'est un **corps** lorsque c'est un anneau à division commutatif.

Remarque 1.2.

1. Le second point peut se résumer en disant que (A, \times) est un monoïde associatif de neutre 1, et A est un anneau à division lorsque $(A \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe.
2. ⚠ On n'a pas précisé que $1 \neq 0$ dans la définition d'un anneau, afin de considérer l'anneau nul comme un anneau. Cela nécessitera quelques précautions au moment de parler d'anneaux intègres.

- Quand le contexte est clair, on parlera simplement de A comme d'un anneau, sans préciser les lois et neutres, et on omettra le symbole \times dans les calculs.

Exercice 1. Soit $(A, +, \times, 0, 1)$ un anneau. Montrer que pour tout $x \in A$, $0 \times x = 0$ et $-1 \times x = -x$. Montrer que l'on n'a pas besoin de supposer $(A, +)$ abélien dans la définition d'un anneau.

Exemple 1.3.

- $(\mathbb{N}, +, \times, 0, 1)$ n'est pas un anneau mais $(\mathbb{Z}, +, \times, 0, 1)$ est un anneau commutatif qui n'est pas un corps.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times, \bar{0}, \bar{1})$ est un anneau commutatif.
- Si A est un anneau alors pour tout $n \geq 1$, $(\mathcal{M}_n(A), +, \times, 0, I_n)$ est un anneau. Il est non commutatif si $n \geq 2$ (et A est non nul).
- Si A est un anneau et E un ensemble non vide alors $A^E = \{f : E \rightarrow A\}$ est un anneau pour l'addition et la multiplication des fonctions, de neutre additif la fonction nulle et neutre multiplicatif la fonction constante égale à 1.
- Si G est un groupe abélien alors $(\text{End}(G), +, \circ, 0, \text{id}_G)$ est un anneau.
- Si I est un intervalle réel alors $(C^0(I), +, \times, 0, 1)$ est un anneau.

Définition 1.4. Soit A un anneau. Un **sous-anneau** de A est une partie B de A telle que $(B, +|_{B \times B}, \times|_{B \times B}, 0, 1)$ soit un anneau.

Exercice 2. Montrer que B est un sous-anneau de A si et seulement si $1 \in B$, B est un sous-groupe de $(A, +)$ et B est stable par \times .

Exemple 1.5.

- \mathbb{Z} est un sous-anneau de \mathbb{R} .
- Les sous-groupes $n\mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} n'en sont pas des sous-anneaux pour $n \neq \pm 1$.

La notion de sous-anneau n'est pas très importante (mais elle est au programme), car ce n'est pas la bonne notion qui mène à celle d'anneau quotient. La bonne notion est celle d'idéal (de « nombre idéal », concept inventé par Kummer pour démontrer le grand théorème de Fermat), introduite par Dedekind dans les années 1870 pour étudier l'arithmétique des corps de nombres.

Définition 1.6. Soit A un anneau. Un **idéal à gauche** de A est une partie I telle que $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ et I est absorbant à gauche pour \times , c'est-à-dire que $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$. Un **idéal à droite** est un sous-groupe absorbant à droite et un **idéal bilatère** (on dira simplement **idéal** dans la suite) est un idéal à gauche et à droite.

Remarque 1.7.

- Pour montrer que $I \subset A$ est un idéal à gauche, il suffit donc de montrer que $I \neq \emptyset, \forall x, y \in I, x - y \in I$ et $\forall a \in A, \forall x \in I, ax \in I$. Si A est commutatif, les notions d'idéal à gauche et d'idéal à droite coïncident.
- D'après la définition d'un idéal I (à gauche ou à droite), on a $I = A$ si et seulement si $1 \in I$.

Exemple 1.8.

1. Si A est un anneau, alors A et $\{0\}$ sont des idéaux de A .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ est un idéal de \mathbb{Z} , et tout idéal de \mathbb{Z} est de cette forme.
3. Si K est un corps et F est un sous-espace vectoriel de K^n , alors $\{M \in \mathcal{M}_n(K) \mid F \subset \ker M\}$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(K)$.

Proposition 1.9. Soit A un anneau et $(I_j)_{j \in J}$ une famille d'idéaux à gauche (resp. à droite) de A . Alors

$$\bigcap_{j \in J} I_j$$

est un idéal à gauche (resp. à droite) de A .

Définition 1.10. Soit A un anneau et $S \subset A$. L'**idéal engendré** par S est

$$(S) = \bigcap_{\substack{I \text{ idéal de } A \\ S \subset I}} I.$$

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) idéal de A contenant S . Un idéal engendré par un seul élément est dit **principal**.

Remarque 1.11. Quand S est un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_n\} \subset A$ on note également $(S) = (a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 3. Soit $S \subset A$. Montrer que

$$(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i, b_i \in A, s_i \in S \right\}.$$

En particulier, si $a \in A$ et A est commutatif alors $(a) = \{ax \mid x \in A\} = aA$.

Exercice 4. Montrer que, si A est commutatif, $(a) = A$ si et seulement si $a \in A^\times$.

Proposition 1.12. Soit A un anneau, I et J des idéaux de A . Alors

$$(I, J) = \{i + j \mid i \in I, j \in J\} = I + J.$$

Exercice 5. Soit I et J des idéaux de A . Montrer que

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, n\}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

est un idéal de A . Le comparer à $I + J$ et $I \cap J$.

Définition 1.13. Soit $(A, +_A, \times_A, 0_A, 1_A)$ et $(B, +_B, \times_B, 0_B, 1_B)$. Un **morphisme d'anneaux** entre A et B est une application $f : A \rightarrow B$ telle que :

1. $f(1_A) = 1_B$.
2. $\forall x, y \in A, f(x +_A y) = f(x) +_B f(y)$.
3. $\forall x, y \in A, f(x \times_A y) = f(x) \times_B f(y)$.

On dit que f est un **isomorphisme** lorsqu'il est bijectif, un **endomorphisme** lorsque $B = A$ et un **automorphisme** lorsque c'est un endomorphisme bijectif.

Exemple 1.14.

1. Pour tout anneau A , id_A est un automorphisme de A .
2. La conjugaison complexe est un automorphisme de \mathbb{C} . Y en a-t-il d'autres (vous avez 4h) ?
3. Si A est un anneau et $a \in A$ alors $f \mapsto f(a)$ est un morphisme d'anneaux de A^A dans A .
4. Δ La fonction nulle d'un anneau A vers un anneau B n'est pas un morphisme d'anneaux (sauf si B est nul).

Notation. On écrira $A \simeq B$ lorsqu'il existe un isomorphisme entre A et B . La proposition suivante montre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition 1.15. *La composée de morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux. Si $f : A \rightarrow B$ est un isomorphisme d'anneaux alors $f^{-1} : B \rightarrow A$ en est un également.*

Proposition 1.16. *L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal.*

Δ Ce n'est pas forcément vrai de l'image directe, voir les exercices.

Définition 1.17. *Soit A et B des anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Le **noyau** de f est*

$$\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

et son **image** est

$$\text{im } f = \{b \in B \mid \exists a \in A, f(a) = b\}.$$

Proposition 1.18. *Soit A et B des anneaux et $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors $\ker f$ est un idéal de A et $\text{im } f$ est un sous-anneau de B . De plus, f est injectif si et seulement si $\ker f = \{0_A\}$ et f est surjectif si et seulement si $\text{im } f = B$.*

Définition 1.19. *Soit $(A, +_A, \times_A, 0, 1)$ un anneau. Une **A -algèbre** (unitaire associative) est un anneau $(K, +_K, \times_K, 0_K, 1_K)$ muni d'une multiplication externe $\cdot : A \times K \rightarrow K$ telle que :*

1. $\forall x \in K, 1.x = x$.
2. \cdot est distributive sur $+_K$: $\forall a \in A, \forall x, y \in K, a.(x +_K y) = a.x +_K a.y$.
3. \cdot est distributive sur $+_A$: $\forall a, b \in A, \forall x \in K, (a +_A b).x = a.x +_A b.x$.
4. \cdot est compatible avec \times_K : $\forall a \in A, \forall x, y \in K, a.(x \times_K y) = (a.x) \times_K y = x \times_K (a.y)$.
5. \cdot est compatible avec \times_A : $\forall a, b \in A, \forall x \in K, (a \times_A b).x = a.(b.x)$.

On dira que K est un **algèbre à division** lorsque c'est un anneau à division qui est une A -algèbre.

Remarque 1.20. De manière équivalente, une A -algèbre est un anneau K muni d'une structure de **A -module** telle que l'application qui à un élément $a \in A$ associe la multiplication par a dans K est un morphisme d'anneaux de A dans l'anneau des endomorphismes A -linéaires de K , $\text{End}_A(K)$.

Exemple 1.21.

1. Tout anneau est une \mathbb{Z} -algèbre.
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, tout anneau A vérifiant $\forall a \in A, na = 0$ est une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -algèbre.
3. Si A est un anneau, alors $\mathcal{M}_n(A)$ est une A -algèbre.
4. Si A est un anneau et $f : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, alors B est muni d'une structure de A -algèbre via $\forall a \in A, \forall b \in B, a.b = f(a) \times_B b$. En particulier, si $A \subset B$ alors B est une A -algèbre.

2 Anneaux de polynômes

Dans cette section, A est un anneau commutatif.

Définition 2.1. On définit l'**anneau des polynômes en une variable** sur A , noté $A[X]$, comme l'ensemble des applications $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ à support fini, c'est-à-dire telles que $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sauf au plus un nombre fini. On le munit des opérations suivantes :

1. Si $f, g : \mathbb{N} \rightarrow A$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f + g)(n) = f(n) + g(n)$.
2. Si $f, g : \mathbb{N} \rightarrow A$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f \times g)(n) = \sum_{k=0}^n f(k)g(n-k) = \sum_{\substack{a,b \in \mathbb{N} \\ a+b=n}} f(a)g(b)$.

De plus, on note X l'élément $\delta_1 : \mathbb{N} \rightarrow A$ tel que $\delta_1(1) = 1_A$ et $\delta_1(n) = 0_A$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Remarque 2.2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X^n = \delta_n$.
2. La lettre X n'a bien sûr rien de canonique, et on retrouve souvent $A[Y], A[X_n]$ ou $A[T]$.

Proposition 2.3. Muni des opérations ci-dessus, $A[X]$ est un anneau, de neutre additif la fonction nulle, et de neutre multiplicatif l'application δ_0 . De plus, A se plonge (en tant qu'anneau) dans $A[X]$ via $a \mapsto a.X^0$. Tout élément non nul de $A[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\sum_{i=0}^n a_i X^i,$$

avec $n \in \mathbb{N}, a_i \in A$ et $a_n \neq 0$.

Remarque 2.4. Formellement, $(A[X], +)$ est le groupe abélien libre $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A.X^n \simeq A^{(\mathbb{N})}$, et la multiplication en fait une **algèbre graduée**.

Théorème 2.5. L'injection $a \mapsto a.X^0$ de A dans $A[X]$ fait de $A[X]$ l'algèbre libre sur A , au sens où elle vérifie la propriété universelle suivante : pour toute A -algèbre B et tout élément $b \in B$, il existe un unique morphisme de A -algèbres $\varphi : A[X] \rightarrow B$ tel que $\varphi(X) = b$.

Autrement dit, on peut toujours « évaluer un polynôme en b ».

3 Anneaux quotients

Théorème 3.1. Soit A un anneau et I un idéal de A . On définit la relation d'équivalence \sim sur A par

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I.$$

Notons alors $x + I$ la classe d'équivalence de $x \in A$ et $A/I = \{x + I \mid x \in A\}$. L'ensemble quotient A/I peut être muni d'une structure d'anneau, telle que la projection $A \rightarrow A/I$ soit un morphisme d'anneaux, de la manière suivante :

1. Pour $a, b \in A$, on définit $(a + I) +_{A/I} (b + I) = (a + b) + I$.
2. Pour $a, b \in A$, on définit $(a + I) \times_{A/I} (b + I) = (a \times b) + I$.
3. Le neutre additif est I et le neutre multiplicatif est $1 + I$.

Démonstration. Il s'agit de vérifier que les opérations sont bien définies. Si $a' + I = a + I$ et $b' + I = b + I$ alors il existe $i_1, i_2 \in I$ tels que $a' = a + i_1$ et $b' = b + i_2$ et alors

$$(a' + b') + I = (a + b + i_1 + i_2) + I = (a + b) + I$$

car I est un sous-groupe de $(A, +)$ et

$$(a' \times b') + I = ((a + i_1) \times (b + i_2)) + I = (ab + ai_2 + i_1 b + i_1 i_2) + I = (a \times b) + I$$

car I est absorbant à gauche et à droite. \square

Remarque 3.2. Si l'on note \bar{x} la classe d'équivalence de x , les opérations deviennent simplement $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ et $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$, le neutre additif est $\bar{0}$ et le neutre multiplicatif est $\bar{1}$.

Exemple 3.3.

1. Pour tout anneau A , $A/\{0\} \simeq A$ et $A/A \simeq \{0\}$.
2. On retrouve la structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on connaît bien.
3. Si A est un anneau, alors $A[X]/(X) \simeq A$.

Théorème 3.4 (Propriété universelle du quotient). Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Pour qu'il existe un morphisme d'anneaux $\tilde{f} : A/I \rightarrow B$ tel que $f = \tilde{f} \circ \pi_I$, il faut et il suffit que $I \subset \ker f$. De plus, \tilde{f} est unique. Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \pi_I \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{f} & \\ A/I & & \end{array}$$

Corollaire 3.5 (Premier théorème d'isomorphisme). Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Alors

$$A/\ker f \simeq \text{im } f.$$

Proposition 3.6. Soit I un idéal de A . Les idéaux de A/I sont les J/I , avec J idéal de A contenant I .

Définition 3.7. Soit A un anneau et I un idéal de A . On dit que I est :

1. Un **idéal premier** lorsque $I \neq A$ et $\forall a, b \in A, ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.
2. Un **idéal maximal** lorsque $I \neq A$ et si J est un idéal de A tel que $I \subset J$ alors $J = I$ ou $J = A$.

Exercice 6. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux est un idéal premier. En est-il de même de l'image réciproque d'un idéal maximal ?

Définition 3.8. Un **anneau intègre** est un anneau commutatif non nul A qui vérifie la règle du produit nul : $\forall x, y \in A, xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Exemple 3.9.

1. \mathbb{Z} est un anneau intègre.
2. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas un anneau intègre.

Proposition 3.10. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . Alors

1. I est premier si et seulement si A/I est intègre.
2. I est maximal si et seulement si A/I est un corps.

Corollaire 3.11. Tout idéal maximal d'un anneau commutatif est premier.

Exercice 7. Donner un exemple d'idéal premier non maximal.

Théorème 3.12 (Krull). Tout idéal strict d'un anneau commutatif A est inclus dans un idéal maximal.

Remarque 3.13. Cet énoncé est équivalent à l'axiome du choix ! Il est donc non constructif.

Corollaire 3.14. Soit A un anneau commutatif et $x \in A$. Alors x est inversible si et seulement si x n'appartient à aucun idéal maximal de A .

Définition 3.15. Soit A un anneau. La **caractéristique** de A est

$$\text{car } A = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall n \in \mathbb{N}^*, n1_A \neq 0 \\ \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid n1_A = 0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.16. Autrement dit, si on considère l'unique morphisme d'anneaux $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ alors la caractéristique de A est l'entier naturel n tel que $\ker f = n\mathbb{Z}$.

Exemple 3.17.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de caractéristique n .
2. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont de caractéristique 0.
3. Si A est de caractéristique $n \in \mathbb{N}$ alors $A[X]$ est de caractéristique n .

Exercice 8. Montrer que si B est un quotient de A , alors $\text{car}(B) \mid \text{car}(A)$.

Proposition 3.18. La caractéristique d'un anneau intègre est 0 ou un nombre premier.

Exercice 9. Montrer qu'un anneau commutatif de caractéristique un nombre premier n'est pas nécessairement intègre.

4 Exercices

Exercice 10. Donner un exemple d'anneaux A et B non isomorphes tels que les groupes $(A, +)$ et $(B, +)$ soient isomorphes. Faire de même avec (A^\times, \times) et (B^\times, \times) isomorphes.

Exercice 11. Montrer que l'image d'un idéal par un morphisme d'anneaux n'est pas nécessairement un idéal. Quelle condition ajouter sur le morphisme pour que ce soit le cas ? Faire de même avec l'image réciproque d'un idéal maximal.

Exercice 12. Soit A un anneau commutatif et I_1, I_2 des idéaux de A . Montrer que $I_1 \cup I_2$ est un idéal de A si et seulement si $I_1 \subset I_2$ ou $I_2 \subset I_1$.

Exercice 13. 1. On définit les lois $+$ et \times sur \mathbb{R}^2 par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

et

$$(a, b) \times (c, d) = (ac, bd).$$

Montrer que ces lois munissent \mathbb{R}^2 d'une structure d'anneau. Est-il intègre ?

2. On définit les lois \oplus et \otimes sur \mathbb{R}^2 par

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

et

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Montrer que ces lois munissent \mathbb{R}^2 d'une structure de corps.

Exercice 14. Soit A un anneau. Montrer que $x, y \in A$ commutent si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Exercice 15. Déterminer l'ensemble des automorphismes de \mathbb{Q} , et de \mathbb{R} .

Exercice 16. Déterminer la caractéristique des anneaux suivants :

1. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\prod_{n \geq 2} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
3. $\text{End}(G)$ avec G un groupe abélien.

Exercice 17. 1. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

2. Soit K un corps. Montrer qu'une K -algèbre intègre de dimension finie est une algèbre à division.
3. Montrer qu'un anneau intègre est un corps si et seulement s'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 18. Soit A un anneau, I, J des idéaux de A avec $I \subset J$. Montrer que $(A/I)/(J/I) \simeq A/J$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que

$$\mathbb{Z}[X]/(P, n) \simeq (\mathbb{Z}[X]/(P))/(\bar{n}) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]/(\bar{P}).$$

Exercice 20. Soit A un anneau commutatif. On dit que les idéaux I et J sont **comaximaux** lorsque $I + J = A$.

1. Montrer que si I et J sont comaximaux, alors $I \cap J = IJ$.
2. En déduire le théorème chinois : $A/IJ \simeq A/I \times A/J$.
3. Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X^4 - 1) \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}$.

Exercice 21. Soit A un anneau commutatif. On dit qu'il est **local** lorsqu'il admet un seul idéal maximal.

1. Montrer que A est local si et seulement si l'ensemble de ses éléments non inversibles est un idéal et que, dans ce cas, cet idéal est l'unique idéal maximal de A .
2. Montrer que A est local si et seulement pour tout $x \in A$, x ou $1 - x$ est inversible.
3. Montrer que les seuls idempotents d'un anneau local sont 0 et 1.
4. Soit p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ est local.
5. Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $K[X]/(X^n)$ est local.

Exercice 22. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

1. Est-ce que l'anneau $\mathcal{C}^0(I)$ est intègre ?
2. Dans le cas où I est un segment, montrer que ses idéaux maximaux sont les $V(x) = \{f \in \mathcal{C}^0(I) \mid f(x) = 0\}$ où $x \in I$. (Indication : Partant d'un idéal inclus dans aucun $V(x)$, obtenir un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts n'admettant pas de sous-recouvrement fini.).
3. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ admet des idéaux maximaux différent des $V(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. (Indication : Penser aux fonctions à support compact.)

Exercice 23. Soit Ω un ouvert connexe non vide de \mathbb{C} . Montrer que l'anneau $\text{Hol}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω est intègre. Est-ce un corps ?

Exercice 24. Soit E un ensemble.

1. Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau (où $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ est la **différence symétrique**).
2. Montrer que, quand E est fini, les idéaux de $\mathcal{P}(E)$ sont exactement les $\mathcal{P}(F)$ avec $F \subset E$.
3. Trouver un idéal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui ne soit pas de la forme $\mathcal{P}(F)$ avec $F \subset \mathbb{N}$.

Exercice 25. On définit les lois \oplus et \otimes sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ par

$$x \oplus y = \max(x, y)$$

et

$$x \otimes y = x + y,$$

avec la convention $-\infty + a = -\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Est-ce que ces lois permettent de munir \mathbb{R} d'une structure d'anneau ?

Exercice 26. Notons $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$.

1. Montrer que \mathbb{H} est une \mathbb{R} -algèbre de dimension 4. On l'appelle **l'algèbre des quaternions**.
2. Notons $\mathbf{1} = I_2$, $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que le sous-groupe de \mathbb{H}^\times engendré par \mathbf{i}, \mathbf{j} et \mathbf{k} est isomorphe à \mathbb{H}_8 .
3. Si $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, on note $\bar{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$ et $N(q) = q\bar{q}$. Montrer que \mathbb{H} est une algèbre à division non commutative.

Exercice 27. Soit A et B deux anneaux commutatifs. Montrer que les idéaux de $A \times B$ sont exactement les $I \times J$ avec I idéal de A et J idéal de B .

Exercice 28. Soit A un anneau et $x \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1 - x \in A^\times$.

Exercice 29. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A . On appelle **radical** de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A .
2. On note $\text{Nil}(A) = \sqrt{\{0\}}$ le **nilradical** de A . Montrer que $A/\text{Nil}(A)$ est un anneau **réduit**, c'est-à-dire $\text{Nil}(A/\text{Nil}(A)) = \{0\}$.
3. Montrer que pour tout idéal premier P de A , on a $\text{Nil}(A) \subset P$.
4. On appelle **radical de Jacobson** de A l'intersection $\text{Jac}(A)$ des idéaux maximaux de A . Montrer que $\text{Nil}(A) \subset \text{Jac}(A)$.
5. Montrer que pour tout $x \in A$, $x \in \text{Jac}(A)$ si et seulement si pour tout $a \in A$, $1 + ax$ est inversible.
6. En déduire une autre démonstration du fait que $\text{Nil}(A) \subset \text{Jac}(A)$.

Remarque. On montre, grâce à l'axiome du choix, qu'en fait $\text{Nil}(A)$ est l'intersection des idéaux premiers de A .

Exercice 30. Soit A un anneau commutatif. On note $\text{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A . Pour tout idéal I de A , on définit $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$.

1. Montrer que les $V(I)$ sont les fermés d'une topologie non séparée sur $\text{Spec}(A)$.
2. Montrer que si A est intègre alors $\{(0)\}$ est dense dans $\text{Spec}(A)$.
3. Montrer qu'un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ induit une application continue $\tilde{f} : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$.

Exercice 31. Soit A un anneau intègre. On définit l'**anneau des séries formelles** $A[[X]]$ sur A comme l'ensemble des sommes formelles $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in A$, muni de l'addition terme à terme et de la multiplication correspondant au produit de Cauchy. On admettra qu'il s'agit d'une A -algèbre.

1. Montrer que $A[[X]]$ est un anneau intègre.
2. Déterminer $A[[X]]^\times$.