La fonction Lambda et les nombres premiers

Alexandre Bailleul

Résumé

On s'intéresse à la fonction Lambda (forcément !) de Von Mangoldt et à d'autres lettres grecques, et on montre en quoi celles-ci permettent de démontrer le Théorème des nombres premiers®.

1 Introduction : la fonction π

La fonction la plus importante des mathématiques est certainement (bon peut-être pas) la fonction π de comptage des nombres premiers, c'est-à-dire, pour tout $x \geq 2$,

$$\pi(x) := \#\{p \leq x\},$$

où ici et dans la suite, p désigne une indexation sur l'ensemble des nombres premiers. Le comportement asymptotique de cette fonction a intéressé, et continue d'intéresser, beaucoup de mathématiciens. Le théorème des nombres premiers affirme que

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log x},$$

autrement dit

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1.$$

C'est un résultat non trivial qui a une riche histoire (déjà racontée dans un séminaire Lambda [1]), et dont on va schématiser la démonstration.

Le symbole log désignera le logarithme népérien usuel, ainsi que la détermination principale du logarithme complexe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et on rappelle que $f(x) = O(g(x))$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, dans le domaine des x concernés, $|f(x)| \leq Cg(x)$.

2 De π à ψ, en passant par θ

2.1 La fonction θ

On peut réécrire $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$. Pour une raison qui devrait être claire un peu plus tard, il est plus naturel de compter les nombres premiers p avec un poids $\log p$. On introduit donc la fonction θ de Tchebychev (1821-1894) : pour tout $x \geq 2$,

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p.$$

Notons que pour tout $x \geq 2$, $\theta(x)$ n'est rien d'autre que le logarithme de la *primorielle*

$$\prod_{p \leq x} p.$$

En 1848, Tchebychev obtient par des moyens élémentaires le résultat remarquable suivant : il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $x \geq 2$,

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq c_2 \frac{x}{\log x}.$$

C'est à cette occasion qu'il introduit la fonction θ, et la fonction ψ dont on reparlera bientôt.

Il est clair que $\theta(x) \leq \pi(x) \log x$. Nous allons voir que l'on peut comparer beaucoup plus finement ces quantités.

Lemme 2.1. *Pour tout $x \geq 2$, on a*

$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\log t)^2} \, \mathrm{d}t.$$

Démonstration. C'est un exemple de *sommation par parties*, l'analogue discret de l'intégration par parties. Montrons le résultat général suivant : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes et $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $x \geq 0$,

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_0^x A(t) f'(t) \, \mathrm{d}t,$$

où $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$. Pour démontrer cela, on procède à une sommation d'Abel, c'est-à-dire que l'on écrit $a_n = A(n) - A(n-1)$ (avec la convention $A(x) = 0$ pour $x < 0$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} a_n f(n) = \sum_{n \leq x} (A(n) - A(n-1)) f(n) &= \sum_{n \leq x} A(n) f(n) - \sum_{n \leq x-1} A(n) f(n+1) \\
&= A(\lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor) + \sum_{n \leq x-1} A(n)(f(n) - f(n+1)) \\
&= A(\lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor) - \sum_{n \leq x-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= A(\lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor) - \int_0^{\lfloor x \rfloor} A(t) f'(t) \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

puisque A est constante sur tout intervalle de la forme $[n, n+1[$. Il n'y a plus qu'à observer que $A(x)f(x) = A(\lfloor x \rfloor) f(\lfloor x \rfloor) + \int_{\lfloor x \rfloor}^x A(t) f'(t) \, \mathrm{d}t$ pour la même raison.

Revenons à notre lemme. Il suffit d'appliquer la formule de sommation par parties à la suite définie par

$$a_n = \begin{cases} \log p \text{ si } n \text{ est un nombre premier } p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases},$$

dont la fonction sommatoire est θ, et $f = \frac{1}{\log}$ (en notant que $\theta(t) = 0$ pour $t < 2$). $\square$

On en déduit facilement [1] que si $\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ alors $\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}$, c'est-à-dire le théorème des nombres premiers. On va donc chercher à établir cette estimation.

2.2 La fonction ψ

Introduisons maintenant la fonction suivante : pour $x \geq 2$, on pose

$$\psi(x) = \sum_{k\geq 1} \sum_{p^k \leq x} \log p.$$

C'est une sorte de généralisation de la fonction θ, mais où l'on prend également en compte les puissances de nombres premiers. On peut remarquer que, pour tout $x \geq 2$, $\psi(x)$ est le logarithme du PPCM des entiers $\leq x$. Pour tout $k \geq 1$ et tout nombre premier p, les conditions $p^k \leq x$ et $p \leq x^{1/k}$ sont équivalentes, de sorte que

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \theta(x^{1/k}).$$

Notons que pour tout $x \geq 2$, cette somme est en fait finie : $\theta(x^{1/k})$ est nul dès que $x^{1/k} < 2$, c'est-à-dire dès que $k > \lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor$.

On va désormais montrer que si $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ alors $\theta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2. *On a*

$$\theta(x) = O(x)$$

pour $x \geq 2$.

Démonstration. On utilise une observation astucieuse : pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ est divisible par tous les nombres premiers p tels que $n < p \leq 2n$. En effet, on a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ et si $n < p \leq 2n$, alors p divise $(2n)!$ mais pas $n!$. Ainsi d'après le lemme de Gauss, on obtient que

$$\left(\prod_{n<p\leq 2n} p\right) \mid \binom{2n}{n}.$$

Puisque $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ (penser au développement de $(1+1)^{2n}$), on a donc

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq 4^n.$$

En passant aux logarithmes, on trouve

$$\theta(2n) - \theta(n) \leq n \log 4.$$

1. $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\mathrm{d}t = \int_2^{x^{1/2}} \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\mathrm{d}t + \int_{x^{1/2}}^x \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2}\mathrm{d}t = O(x^{1/2}) + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right) = o\left(\frac{x}{\log x}\right)$

Notons qu'en fait, pour tout réel $x \geq 2$, on a

$$\theta(2x) - \theta(x) \leq x \log 4$$

puisque le membre de gauche ne change pas en remplaçant x par sa partie entière, et le membre de droite est croissant en x. Pour conclure, il n'y a plus qu'à sommer ces inégalités télescopiques :

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \theta(x) - \theta(x/2) + \theta(x/2) - \theta(x/4) + \theta(x/4) - \dots \\ &\leq \left(x + \frac{x}{2} + \frac{x}{2^2} + \dots\right) \log 4 = 2x \log 4.\end{aligned}$$

□

On peut maintenant écrire

$$0 \leq \psi(x) - \theta(x) = \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor} \theta(x^{1/k}) = O(x^{1/2} \log x),$$

en majorant chacun des $\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor - 1 = O(\log x)$ termes brutalement par $O(x^{1/2})$, ce qui montre que si $\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$ alors $\theta(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$, et c'est désormais ceci que l'on va chercher à démontrer.

3 La fonction Λ

Réécrivons maintenant la fonction ψ avec une sommation sur tous les entiers. Pour cela, on introduit la fonction Lambda (enfin !) de Von Mangoldt (1854-1925) : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p \text{ si } n \text{ est une puissance d'un nombre premier } p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On a donc, pour tout $x \geq 2$,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Pour comprendre le comportement d'une suite, il est usuel de lui associer une fonction génératrice. On pourrait par exemple penser à étudier la fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda(n) z^n$$

ou sa cousine

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n!} z^n,$$

mais en réalité, il est plus commode de travailler avec des séries de Dirichlet (1805-1859) dans ce contexte. On définit donc la fonction

$$F : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Il est clair que pour tout $n \geq 1$, $\Lambda(n) \leq \log n$, de sorte que la série ci-dessus converge absolument lorsque $\mathfrak{Re}(s) > 1$. La convergence étant normale sur tout demi-plan de la forme $\Omega_a := \{s \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(s) > a\}$, avec $a > 1$, la fonction F est holomorphe sur Ω_1.

Dans le cas d'une série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, on sait que l'on peut extraire le coefficient a_n grâce à une formule intégrale, la formule de Cauchy (1789-1857) :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z,$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe fermée suffisamment régulière faisant un tour autour de l'origine. Peut-on faire de même avec les séries de Dirichlet ? La réponse est donnée par la formule de Perron (1880-1975), dont on donne une version simplifiée ici.

Lemme 3.1 (Formule de Perron)**.** *Soit*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

une série de Dirichlet convergeant absolument pour $\mathfrak{Re}(s) \geq c > 0$. Alors pour tout $x \geq 1$ non entier, on a

$$\sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s.$$

Remarque. Si $x = N$ est entier, il faut prendre $\frac{a_N}{2}$ comme dernier terme de la somme.

Démonstration. On ne donnera que l'idée de la preuve. On commence par montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{y^s}{s} \,\mathrm{d}s = \begin{cases} 1 \text{ si } y > 1 \\ 0 \text{ si } 0 < y < 1 \end{cases} + O\left(\frac{y^c}{T|\log y|}\right),$$

ce qui se vérifie par un calcul de résidu (quand $y > 1$ on intègre sur un rectangle entourant 0, et on envoie le côté gauche à l'infini, quand $0 < y < 1$ on intègre sur un rectangle n'entourant pas 0, et on envoie le côté droit à l'infini, le terme d'erreur venant des estimations sur les côtés horizontaux). On somme maintenant ces égalités, en prenant $y = \frac{x}{n}$ ce qui donne

$$\sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-iT}^{c+iT} a_n \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\mathrm{d}s}{s} + o_{T \to +\infty}(1).$$

Finalement, la convergence normale dans la région $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(s) \geq c\}$ permet d'intervertir somme et intégrale. $\square$

On a donc établi la formule très utile

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s,$$

valable pour tout $x \geq 1$ non entier et tout $c > 1$. Pour les x entiers, on a vu dans la remarque précédente qu'il faut en fait considérer un facteur $\frac{\Lambda(x)}{2}$ en moins, qui est clairement $O(\log x)$. Ainsi, en toute généralité,

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s + O(\log x)$$

pour tout $x \geq 2$ et $c > 1$. L'équivalent recherché étant x, on peut oublier ce terme supplémentaire. Il nous faut maintenant identifier la fonction F.

4 Le lien entre F et ζ

Entre en scène la célèbre fonction zêta de Riemann (1826-1866), définie pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$ par

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Son intérêt provient de sa factorisation en *produit eulérien* :

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

qui est une évidence formelle lorsque l'on développe en série géométrique chaque facteur du produit. La convergence de la série $\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$ sur Ω_1 montre en particulier que ζ ne s'annule pas dans cette région du plan, et on peut considérer son logarithme complexe. On a, toujours pour $\mathfrak{Re}(s) > 1$,

$$\log \zeta(s) = \sum_p - \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{ks}}.$$

Toujours en faisant attention aux problèmes de convergence, on en déduit en dérivant que

$$(\log \zeta)'(s) = -\sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\log p}{p^{ks}}.$$

On observe maintenant que le coefficient devant $\frac{1}{n^s}$ dans cette dernière série de Dirichlet n'est rien d'autre que $-\Lambda(n)$. Autrement dit, on a établi que notre fonction analytique à étudier F n'est rien d'autre que

$$-(\log \zeta)' = -\frac{\zeta'}{\zeta}.$$

Nous avons donc à notre disposition la formule de Von Mangoldt :

$$\psi(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) \frac{x^s}{s} \, \mathrm{d}s + O(\log x),$$

valable pour tout $x \geq 2$ et $c > 1$. Rappelons que notre but est d'estimer la taille de la quantité $\psi(x)$, plus précisément de montrer que $\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x$. Pour ce faire, on va à nouveau utiliser le théorème des résidus, pour estimer la valeur de cette intégrale. Se pose donc la question de la localisation des pôles de l'intégrande. On a dit précédemment que la fonction ζ ne s'annule pas sur Ω_1, il n'y a donc a priori pas de pôles en vue pour la fonction $s \mapsto -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}$, définie sur Ω_1. Cependant, comme l'a montré Riemann en 1859, cette fonction admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier. Riemann montre en fait que ζ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, avec pour unique pôle un pôle simple en 1, de résidu 1. On va ici se contenter de la chose suivante : une sommation par parties donne

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^s} + s \int_1^x \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, lorsque $\mathfrak{Re}(s) > 1$, on obtient, en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$\zeta(s) = s \int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t = s \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \,\mathrm{d}t$$

et cette dernière expression définit clairement une fonction méromorphe sur Ω_0, avec un pôle simple en 1 de résidu 1.

Analysons maintenant les pôles de la fonction $s \mapsto -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s}$ dans Ω_0. Le pôle de ζ en 1 fournit un pôle, de résidu x et chaque zéro ρ (compté avec multiplicité) de ζ contribue à un pôle, de résidu $-\frac{x^\rho}{\rho}$. Des estimations d'analyse complexe sur la fonction ζ, et une nouvelle application du théorème des résidus, permettent d'obtenir

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{x^s}{s} \,\mathrm{d}s = x - \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} + O_c(1),$$

où la somme porte sur les zéros ρ de ζ vérifiant $0 < \mathfrak{Re}(\rho) \leq 1$. Il apparaît donc qu'il est crucial savoir dire des choses plus précises sur les zéros de la fonction ζ pour conclure.

Théorème 4.1 (Hadamard, De la Vallée-Poussin, 1896)**.** *La fonction ζ ne s'annule pas sur la droite* $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{Re}(s) = 1\}$.

C'est l'argument central des démonstrations originales d'Hadamard (1865-1963) et de De la Vallée-Poussin (1866-1962) du théorème des nombres premiers (et plus tard de Wiener (1894-1964) et Ikehara (1904-1984)). Dans notre présentation, il serait en fait nécessaire d'établir une *région sans zéro* pour la fonction ζ. On pourrait imaginer qu'une coalition de zéros de parties réelles convergeant vers 1 rende la somme $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ trop grande, de sorte que celle-ci ne soit pas négligeable devant x (notons que le module de x^ρ est $x^{\mathfrak{Re}(\rho)}$). La région sans zéro de De la Vallée-Poussin permet d'obtenir

$$\psi(x) = x + O\left(x \exp(-c\sqrt{\log x})\right),$$

où $c > 0$ est une constante, ce qui conclut la démonstration du fait que

$$\psi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x,$$

et comme on l'a vu, que

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}.$$

5 Conclusion

On a montré les liens entre les différentes fonctions de comptage π, θ et ψ, et montré comment obtenir le théorème des nombres premiers à partir de résultats sur la localisation des zéros de la fonction ζ de Riemann. Au cœur de ce raisonnement se trouve la fonction Λ de Von Mangoldt.

Il existe d'autres manières de démontrer le théorème des nombres premiers, mais toutes font intervenir d'une manière ou d'une autre la fonction Λ. Celle-ci intervient également dans les démonstrations d'autres types de théorèmes des nombres premiers, par exemple le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, ou le théorème de Chebotarev (1894-1947).

Le terme d'erreur le plus petit envisageable dans l'estimation $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ est $O(x^{1/2}\log x)$. Celui-ci correspond à l'*hypothèse de Riemann* : les zéros ρ de ζ tels que $0 < \mathfrak{Re}(\rho) < 1$ ont pour partie réelle $1/2$. On est très loin de savoir démontrer cela : la meilleure région sans zéro connue pour la fonction ζ date de 1958 (Korobov (1917-2004) et Vinogradov (1891-1983)) et elle n'exclut même pas qu'il puisse exister des zéros dont les parties réelles convergent vers 1. Pour plus de détails et de développements, on recommande l'excellent [2].

Références

[1] Alexandre Bailleul, *Autour du théorème des nombres premiers* (2018). `https://www.math.u-bordeaux.fr/~abailleul/Lambda.pdf`.

[2] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan, *Multiplicative number theory I : Classical theory*, Vol. 97, Cambridge University Press, 2007.

Alexandre Bailleul, Univ. Bordeaux, IMB, UMR 5251, F 33405, Talence, France
Email address : alexandre.bailleul@math.u-bordeaux.fr