Fonctions multiplicatives dans les petits intervalles

Alexandre Bailleul

Encadrant : Gérald Tenenbaum

Institut Élie Cartan Nancy

4 Mai 2015 - 12 Juin 2015

Table des matières

Introduction

J'ai effectué mon stage de M1 à l'Institut Élie Cartan à Nancy, sous la direction de Gérald Tenenbaum. Je tiens à le remercier, ainsi que tout le personnel de l'Institut Élie Cartan pour leur accueil et les conditions de travail agréables dont j'ai pu profiter. Je remercie également Gautier Hanna pour l'aide qu'il m'a apporté, ainsi que Léa Audureau–Guillo pour son soutien.

L'objectif de mon stage était de comprendre et expliquer l'article du 9 février 2015 de Kaisa Matomäki et Maksym Radziwiłł intitulé « A note on the Liouville function in short intervals ». L'objet qui va nous intéresser dans ce mémoire est la fonction de Liouville [1] λ, définie plus loin, et plus précisément ses moyennes dans les « petits intervalles » de la forme $[x, x + X^\delta]$ avec $\delta > 0$ et $x \in [X, 2X]$.

Matomäki et Radziwiłł ont montré que pour tout $\delta > 0$ et pour *presque tout* $x \in [X, 2X]$, on a

$$\sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) = o(X^\delta)$$

quand $X \to +\infty$.

Nous reviendrons plus tard sur l'appellation « presque tout » (qui n'est pas celle de théorie de la mesure !), on peut déjà se contenter de dire « avec les mains » que dans les intervalles courts de la forme $[x, x+X^\delta]$, il y a beaucoup de compensations dans la somme des valeurs de la fonction de Liouville.

Ce résultat est en fait un cas particulier d'un théorème plus général (mais aussi beaucoup plus compliqué à démontrer) des deux mêmes chercheurs sur les moyennes de fonctions multiplicatives dans les intervalles courts de la forme $[x, x+h(X)]$ avec $h(X) \to +\infty$ quand $X \to +\infty$ et $x \in [X, 2X]$. L'article que j'ai étudié a été écrit car ceux-ci se sont rendus compte que dans le cas de la fonction de Liouville et des intervalles courts de longueur X^δ, le résultat ne nécessitait pas autant de travail.

1. Joseph Liouville (1809-1882)

Partie I : Quelques résultats de théorie analytique des nombres

1) Notations et définitions préliminaires

Commençons par quelques notations qui reviendront tout le long de ce mémoire. Dans toute la suite, les lettres x et X désignent des entiers naturels et, comme le veut l'usage, la lettre p désigne un nombre premier. Pour un nombre complexe s on notera $\sigma := \Re e(s)$ et $\tau := \Im m(s)$. Le symbole $p^\nu || n$ signifie que $p^\nu | n$ mais $p^{\nu+1} \nmid n$ et le PGCD de deux entiers n et m sera noté (n, m).

On utilisera indifféremment les notations de Landau[2] $f(x) = O(g(x))$ et de Vinogradov[3] $f(x) \ll g(x)$ pour dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|f(x)| \leq c|g(x)|$ pour tout x dans le domaine de définition commun à f et g, avec parfois $f(x) = O_A(g(x))$ ou $f(x) \ll_A g(x)$ pour indiquer une dépendance de la constante c par rapport à un paramètre A. Enfin le symbole $n \sim X$ signifie $X \leq n \leq 2X$ et se lit « n de l'ordre de grandeur de X ».

Intéressons-nous maintenant à l'objet principal de ce mémoire. La fonction étudiée par Matomäki et Radziwiłł dans leur article est la *fonction de Liouville*, notée λ, qui détermine la parité du nombre de facteurs premiers (comptés avec multiplicité) d'un nombre entier.

Définition 1 *On définit les fonctions Ω et λ sur $\mathbb{N}^*$ par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Omega(n) := \sum_{p^\nu || n} \nu,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda(n) := (-1)^{\Omega(n)},$$

avec les conventions $\Omega(1) = 0$ et $\lambda(1) = 1$.

2. Edmund Landau (1877-1938)
3. Ivan Vinogradov (1891-1983)

Si l'entier n a un nombre de facteurs premiers (toujours comptés avec multiplicité) pair, alors $\lambda(n) = 1$ et dans le cas contraire on a $\lambda(n) = -1$.

On remarque que la fonction Ω est *complètement additive*, c'est-à-dire que pour tous m et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\Omega(mn) = \Omega(m) + \Omega(n)$ et $\Omega(1) = 0$. Cela résulte immédiatement de la décomposition de tout entier en produit de facteurs premiers. Ainsi λ est *complètement multiplicative*, c'est-à-dire que pour tous m et n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$ et $\lambda(1) = 1$. On peut d'ailleurs définir λ comme l'unique fonction complètement multiplicative sur $\mathbb{N}^*$ telle que $\lambda(p) = -1$ pour tout nombre premier p.

Le comportement de la fonction de Liouville est a priori assez chaotique, en voici les premières valeurs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\lambda(n)$	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1

Ce comportement chaotique s'explique par le fait que le nombre de facteurs premiers de n est statistiquement indépendant de celui de $n+1$.

On remarque que la somme des valeurs successives de la fonction λ semble plutôt bien s'équilibrer autour de 0. Introduisant la fonction L définie pour tout entier naturel n par $L(n) := \sum_{k \leq n} \lambda(k)$, on peut imaginer que ces sommes de valeurs de la fonction λ se compensent plutôt bien, voire même que celles-ci restent bornées. En réalité il n'en est rien, on sait par exemple que pour une infinité d'entiers naturels n on a l'inégalité

$$L(n) > c\sqrt{n},$$

où c est une constante strictement positive, ce qui montre que

$$\limsup_{n \to +\infty} L(n) = +\infty.$$

On sait cependant que la fonction L n'est en effet pas « trop grande », dans le sens où pour tout $A > 0$, on a

$$L(x) \ll_A \frac{x}{(\log x)^A}.$$

Ainsi on connaît la taille de la fonction L dans les intervalles « longs », de la forme $[X, 2X]$. Plus précisément on a grâce à la majoration précédente

$$L(2X) - L(X) = \sum_{X < n \leq 2X} \lambda(n) = o(X),$$

quand $X \to +\infty$.

La question que l'on se pose maintenant est la suivante : est-ce que la somme des valeurs de la fonction λ est petite lorsque l'on prend ces valeurs dans un « petit » intervalle ? Typiquement, est-ce que l'on a, pour h une fonction de X tendant vers $+\infty$ (arbitrairement lentement) quand $X \to +\infty$ et pour $x \in [X, 2X]$,

$$\sum_{x \leq n \leq x+h(X)} \lambda(n) = o(h(X)) \,?$$

Nous allons nous intéresser au cas particulier où $h(X) = X^{\delta}$, avec $\delta > 0$, et nous verrons que la réponse est positive, à quelques exceptions près, ce qu'ont montré Matomäki et Radziwiłł.

2) Le théorème des nombres premiers

Une fonction très importante en théorie des nombres est la fonction de comptage des nombres premiers π :

Définition 2 *On définit la fonction π par*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \pi(x) := \sum_{p \leq x} 1.$$

Le théorème d'Euclide[4] sur l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers peut se reformuler de manière moderne ainsi :

Théorème 3 (Euclide)
On a

$$\pi(x) \to +\infty$$

lorsque $x \to +\infty$.

Un des résultats les plus importants de la théorie analytique des nombres est le fameux théorème des nombres premiers, conjecturé par Gauss[5] et Legendre[6] à la toute fin du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle. Il a fallu attendre 1896 pour que Hadamard[7] et de la Vallée Poussin[8] le démontrent, indépendamment et simultanément, grâce à l'analyse complexe et l'étude des zéros de la fonction ζ de Riemann[9].

4. Euclide (II$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.)
5. Karl Friedrich Gauss (1777-1855)
6. Adrien-Marie Legendre (1752-1833)
7. Jacques Hadamard (1865-1963)
8. Charles-Jean de la Vallée Poussin (1866-1962)
9. Bernhard Riemann (1826-1866)

Voici l'énoncé du théorème des nombres premiers, dans ce que l'on appelle sa *version faible* :

Théorème 4 (Théorème des nombres premiers (version faible))
On a l'équivalent

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

lorsque $x \to +\infty$.

Une meilleure approximation de la fonction π est donnée par la fonction *logarithme intégral* définie par

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} \; (x \geq 2).$$

On a $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$ quand $x \to +\infty$ et $\mathrm{li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$. Nous aurons besoin dans la suite d'une version plus forte du théorème des nombres premiers.

Théorème 5 (Théorème des nombres premiers (version forte))
Il existe une constante $c > 0$ *telle que*

$$\pi(x) = li(x) + O\left(\exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right).$$

Le meilleur terme d'erreur connu à ce jour est $O(x\exp(-c(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}))$ avec la région sans zéro de Vinogradov et Korobov [10], sur laquelle nous reviendrons plus tard.

Grâce à la version forte du théorème des nombres premiers on peut obtenir la majoration suivante

$$L(X) = \sum_{n \leq X} \lambda(n) \ll_A \frac{X}{(\log X)^A},$$

pour tout $A > 0$.

3) La fonction zêta

Une autre fonction très importante en théorie des nombres est la *fonction zêta de Riemann* :

10. Nikolai Mikhailovich Korobov (1918- ?)

Définition 6 *La fonction zêta de Riemann est la fonction définie par*

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

pour $\Re e(s) > 1$.

C'est l'exemple le plus simple de *série de Dirichlet*[11] (Voir annexe B). Riemann, dans son mémoire de 1859 « *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*[12] », a montré que la fonction zêta se prolonge en une fonction méromorphe, avec pour unique singularité un pôle simple au point 1, et que celle-ci avait un lien particulier avec les nombres premiers.

Ce lien entre la fonction zêta et les nombres premiers provient de la formule suivante, due à Euler[13] :

Théorème 7 (Formule d'Euler)
Pour tout $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\Re e(s) > 1$*, on a*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Démonstration. Soit x dans $]2, +\infty[$.

On a

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \prod_{p \leq x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{ks}}.$$

En distribuant le produit (pour chaque $p \leq x$, le série correspondante converge absolument car $\Re e(s) > 1$) et par l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers on obtient que le terme de droite de cette égalité vaut

$$\sum_{P^+(n) \leq x} \frac{1}{n^s},$$

où le symbole $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier dans la décomposition en produit de nombres premiers de n, et cette somme converge vers bien $\zeta(s)$ quand $x \to +\infty$. □

11. Gustav Dirichlet (1805-1859)
12. Traduction : « Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une taille donnée »
13. Leonhard Euler (1707-1783)

Cette formule, et en particulier la convergence du produit, permet d'obtenir que la fonction ζ ne s'annule dans le demi-plan ouvert $\{s \in \mathbb{C}, \Re e(s) > 1\}$.

Riemann a montré que la fonction zêta admettait un prolongement méromorphe et a même obtenu une équation fonctionnelle pour ce prolongement. Résumons cela dans un théorème :

Théorème 8 (Riemann, 1859)
La fonction ζ admet un prolongement méromorphe, que l'on notera toujours ζ, admettant pour unique singularité un pôle simple en 1.

De plus, ce prolongement vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s). \tag{1}$$

Esquisse de démonstration. En utilisant les formules bien connues

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

(provenant des développements sous forme de produits de fonctions méromorphes de sin et Γ) et

$$\forall \sigma > 0, \Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} 2^{1-2s} \Gamma(2s),$$

(provenant d'un calcul de dérivées logarithmiques), on obtient que l'équation fonctionnelle (1) est équivalente à l'équation fonctionnelle

$$\forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \Phi(s) = \Phi(1-s), \tag{2}$$

où la fonction Φ est définie pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ par

$$\Phi(s) = \zeta(s) \Gamma(\frac{s}{2}) \pi^{-\frac{s}{2}}.$$

On montre d'abord que pour $\sigma > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-\frac{s}{2}}}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u^{\frac{s}{2}-1} \mathrm{e}^{-\pi n^2 u} du \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1) u^{\frac{s}{2}-1} du,
\end{aligned}$$

où θ est la fonction de Jacobi [14], définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-\pi n^2 x}.$$

Or la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\forall x > 0, \sqrt{x}\theta(x) = \theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui se montre avec la formule sommatoire de Poisson [15].

Cette équation fonctionnelle donne que pour tout $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1)\, u^{\frac{s}{2}-1} du &= \int_0^1 (\theta(u) - 1)\, u^{\frac{s}{2}-1} du + \int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1)\, u^{\frac{s}{2}-1} du \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\theta\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right) u^{-\frac{s}{2}-1} du + \int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1)\, u^{\frac{s}{2}-1} du \\
&= \int_1^{+\infty} \theta(u) \left(u^{-\frac{s+1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\right) - \left(u^{-\frac{s}{2}-1} + u^{\frac{s}{2}-1}\right) du \\
&= \int_1^{+\infty} (\theta(u) - 1) \left(u^{-\frac{s+1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1}\right) du + \int_1^{+\infty} \left(u^{-\frac{s}{2}-1} - u^{-\frac{s+1}{2}}\right) du.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale vaut

$$\left(-\frac{2}{s} + \frac{2}{s-1}\right) = \frac{2}{s(s-1)},$$

et on voit donc que la fonction

$$s \mapsto \int_0^{+\infty} (\theta(u) - 1)\, u^{\frac{s}{2}-1} du$$

est symétrique par la transformation $s \mapsto 1-s$ (la convergence de l'intégrale étant garantie par la décroissance exponentielle de la fonction θ), ce qui fournit l'équation fonctionnelle (2) vérifiée par Φ. $\square$

On remarque qu'en spécialisant l'équation fonctionnelle en un entier impair $2n+1, n \in \mathbb{N}^*$, on obtient que $\zeta(-2n) = 0$. En effet la fonction Γ admet des pôles en tous les entiers négatifs, ainsi la fonction $s \mapsto \zeta(1-s) = s \mapsto \frac{\zeta(s)}{2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s)}$ s'annule en tous les entiers impairs plus grand que 1. Dans le cas des entiers pairs, le zéro d'ordre 1 du sinus compense le pôle d'ordre 1 de Γ. En utilisant le fait que

14. Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)
15. Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

ζ ne s'annule pas pour $\sigma > 1$ et l'équation fonctionnelle, on a que ces zéros sont les seuls zéros de ζ pour $\sigma < 0$. Enfin, le fait que $\zeta(x)$ soit réel pour x réel et l'équation fonctionnelle donne que les zéros de partie réelle comprise entre 0 et 1 sont symétriques par rapport à l'axe réel et à la droite $\sigma = \frac{1}{2}$.

Ces zéros aux entiers négatifs pairs sont appelés les *zéros triviaux* de ζ. L'emplacement des autres zéros de la fonction ζ joue un rôle très important dans la théorie analytique des nombres, et, comme on vient de le voir, ils sont situés dans ce qu'on appelle la *bande critique*, c'est-à-dire l'ensemble $\{s \in \mathbb{C}, 0 \leq \Re e(s) \leq 1\}$. C'est en montrant que ζ ne s'annulait pas sur la droite $\sigma = 1$ que Hadamard et de la Vallée Poussin ont pu démontrer le théorème des nombres premiers. La fameuse *hypothèse de Riemann* dit que ces zéros ont tous pour partie réelle $\frac{1}{2}$, et celle-ci, si elle s'avérait vraie, permettrait d'obtenir essentiellement le meilleur terme d'erreur possible dans le théorème des nombres premiers :

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O_\varepsilon\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

On est encore loin d'avoir démontré cette hypothèse, mais certains résultats ont été obtenus dans cette direction. Par exemple on sait qu'il existe une infinité de zéros non triviaux qui ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$ et que ceux-ci représentent une fraction positive des zéros non triviaux.

Le résultat sur les zéros de ζ qui va nous servir est du à Korobov et Vinogradov. Ceux-ci ont déterminé une région sans zéro de ζ dans la bande critique.

Théorème 9 (Korobov et Vinogradov, 1958)
La fonction ζ ne s'annule pas dans la région donnée par

$$\sigma \geq 1 - C(\log|\tau|)^{-\frac{2}{3}}(\log\log|\tau|)^{-\frac{1}{3}} \text{ et } |\tau| \geq 3,$$

où C est une constante > 0.

Le « premier » zéro de ζ dans la bande critique vaut $\frac{1}{2} + \gamma$ où

$$\gamma \approx 14.137,$$

il n'y a donc pas de risque à considérer la région sans zéro de Korobov et Vinogradov pour $|\tau| \geq 14$.

On aura également besoin d'une dernière majoration de $\log\zeta$ dans cette région :

Théorème 10
Dans la région sans zéro de Korobov et Vinogradov on a

$$|\log\zeta(s)| \leq \frac{2}{3}\log\log|\tau| + \frac{1}{3}\log\log\log|\tau| + O(1).$$

En réalité on ne se servira que de la majoration $|\log\zeta(s)| \ll \log\log|\tau|$.

4) La formule de Perron

La formule de Perron [16] est une formule d'analyse complexe très utile en théorie des nombres. Celle-ci est l'analogue pour les séries de Dirichlet de la formule de Cauchy [17] pour les séries entières, car elle permet d'estimer les coefficients de la série de Dirichlet à partir de la somme de celle-ci.

Avant d'énoncer la formule de Perron, rappelons quelques notations et résultats (Voir l'annexe B pour plus de précisions sur les séries de Dirichlet).

Pour une série de Dirichlet $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$, on note $\sigma_c := \inf\{x \in \mathbb{R}, \sum\limits_n \frac{a_n}{n^x} \text{ converge}\}$ son abscisse de convergence et $\sigma_a := \inf\{x \in \mathbb{R}, \sum\limits_n \frac{a_n}{n^x} \text{ converge absolument}\}$ et son abscisse de convergence absolue. Il y a convergence uniforme de la série sur tout demi-plan $\{s \in \mathbb{C}, \Re e(s) \geq \sigma_0\}$ où $\sigma_0 > \sigma_a$. Enfin, si on note F la somme de la série de Dirichlet, et si $\varepsilon > 0$ et $\sigma_0 \in]\sigma_c, \sigma_c + 1[$, alors on a uniformément pour $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c + 1$ (i.e. la constante sous-entendue dans la notation de Vinogradov ne dépend pas de σ dans ce domaine)

$$F(s) \ll |\tau|^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} \; (|\tau| \geq 1). \tag{3}$$

Le lemme suivant est à la base des démonstrations des deux formules de Perron que nous allons voir.

Lemme 1 *Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par*

$$h(x) := \begin{cases} 0 \;\; si \; 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \;\; si \; x = 1 \\ 1 \;\; si \; x > 1 \end{cases}$$

Alors pour tous $\kappa, T, T' > 0$, on a pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$

$$\left| h(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT'}^{\kappa + iT} x^s \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{x^\kappa}{2\pi |\log x|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right)$$

et

$$\left| h(1) - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{\kappa}{T + \kappa}.$$

Démonstration.

16. Oskar Perron (1880-1975)
17. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

1. Soient κ, T et $T' > 0$ et soit $x > 1$. Soit $k > \kappa$ un entier, et soit R_k le rectangle de sommets $\kappa - iT', \kappa + iT, \kappa - k + iT$ et $\kappa - k - iT'$.
   D'après le théorème des résidus, puisque 0 est à l'intérieur du rectangle R_k, on a
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{R_k} x^s \frac{ds}{s} = 1 = h(x).$$
   Or on a
$$\begin{aligned}\left|\int_{\kappa+iT}^{\kappa+iT-k} x^s \frac{ds}{s}\right| &= k\left|\int_0^1 \frac{x^{\kappa+iT-tk}}{\kappa+iT-tk}dt\right| \\ &\leq k\int_0^1 \left|\frac{x^{\kappa+iT-tk}}{\kappa+iT-tk}\right| dt \\ &\leq \frac{k}{T}\int_0^1 \mathrm{e}^{(\kappa-tk)|\log x|}dt \\ &= \frac{k}{T}x^\kappa \frac{(1-\mathrm{e}^{-k|\log x|})}{k|\log x|} \\ &\leq \frac{x^\kappa}{T|\log x|}.\end{aligned}$$
   De même, on a
$$\left|\int_{\kappa-k-iT'}^{\kappa-iT'} x^s \frac{ds}{s}\right| \leq \frac{x^\kappa}{T|\log x|}.$$
   Enfin, en majorant brutalement, on obtient
$$\left|\int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'} x^s \frac{ds}{s}\right| \leq (T+T')\frac{x^{\kappa-k}}{\kappa-k} \to 0$$
   quand $k \to +\infty$, car $x > 1$.
   Ainsi on a
$$\begin{aligned}\left|h(x) - \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} x^s \frac{ds}{s}\right| &= \left|\int_{R_k} x^s \frac{ds}{s} - \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} x^s \frac{ds}{s}\right| \\ &\leq \left|\int_{\kappa+iT}^{\kappa+iT-k} x^s \frac{ds}{s}\right| + \left|\int_{\kappa-k-iT'}^{\kappa-iT'} x^s \frac{ds}{s}\right| + \left|\int_{\kappa-k+iT}^{\kappa-k-iT'} x^s \frac{ds}{s}\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)\frac{x^\kappa}{|\log x|} + o(1)\end{aligned}$$
   quand $k \to +\infty$, d'où
$$\left|h(x) - \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} x^s \frac{ds}{s}\right| \leq \left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T'}\right)\frac{x^\kappa}{|\log x|}.$$

On obtient le résultat pour $0 < x < 1$ de la même manière en considérant l'entier $-k$, avec k comme précédemment.

2. Soient κ et $T > 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s} &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\log(\kappa-iT)}^{\log(\kappa+iT)} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi}\log\left(\frac{\kappa+iT}{\kappa-iT}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}(\arg(\kappa+iT)-\arg(\kappa+iT)) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{\kappa}\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\left|h(1)-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s}\right| &= \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{T}{\kappa}\right)\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{T}{\kappa}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{T}{\kappa}}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} \\ &\leq \frac{1}{\pi}\frac{2}{1+\frac{T}{\kappa}} \\ &\leq \frac{\kappa}{\kappa+T},\end{aligned}$$

où la majoration de l'intégrale vient de l'inégalité classique $\frac{(1+t)^2}{2} \leq 1+t^2$ et du fait que

$$\int_y^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{1}{1+y}.$$

□

L'intérêt de ces estimations est que nous allons pouvoir les sommer, ce qui donnera la formule de Perron.

Théorème 11 (Formule de Perron)
Soit $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet de somme F et d'abscisse de convergence σ_c. Posons, pour $x > 0$,

$$A^*(x) := \sum_{n<x} a_n + \frac{1}{2}a_x,$$

où

$$a_x := \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{N}^* \\ a_N \text{ si } x = N \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors pour tout $\kappa > \max(0, \sigma_c)$ et pour tout $x > 0$, on a

$$A^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

Démonstration.

Supposons tout d'abord que $\kappa > \sigma_a$. Alors la série de Dirichlet converge absolument et uniformément sur $]\kappa - i\infty, \kappa + i\infty[$.

Soit $x > 0$. On a donc, pour tous $T, T' \geq 0$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} F(s) x^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Deux cas se présentent :

1. Si $x \notin \mathbb{N}^*$, alors $A^*(x) = \sum_{n<x} a_n$ et on a pour tous $T, T' > 0$,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} x^s \frac{ds}{s} - A^*(x) \right| &= \left| \sum_{n<x} a_n \left(1 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n>x} a_n \left(0 - \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-iT'}^{\kappa+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\kappa} \frac{x^\kappa}{2\pi |\log\left(\frac{x}{n}\right)|} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) \\ &= \frac{x^\kappa}{2\pi} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\kappa |\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\end{aligned}$$

   d'après le lemme précédent.
   La série converge bien, car comme $x \notin \mathbb{N}^*$, la suite $(|\log\left(\frac{x}{n}\right)|)_n$ est minorée par un réel $K > 0$, et $\kappa > \sigma_a$. Ainsi, en faisant tendre T et T' vers $+\infty$, on obtient bien

$$A^*(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\kappa-i\infty}^{\kappa+i\infty} F(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

2. Si $x = N \in \mathbb{N}^*$, on a cette fois $A^*(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{a_N}{2}$. En sommant comme

précédemment on obtient, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^s}x^s\frac{ds}{s}-A^*(x)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}a_n\left(1-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right)\right.\\ &\quad + a_N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\frac{ds}{s}\right)\\ &\quad \left.+\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_n\left(0-\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}\right)\right|\\ &\leq \frac{x^\kappa}{T\pi}\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^\kappa|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}+\frac{|a_N|\kappa}{T+\kappa}\end{aligned}$$

où encore une fois la série converge car on somme sur les $n \neq N$ et donc pour tout $n \neq N$ le dénominateur est minoré par Kn^κ où $K > 0$. On obtient de nouveau le résultat en faisant tendre T vers $+\infty$.

Maintenant, si $\sigma_c < \kappa \leq \sigma_a$, on a $\kappa + 1 > \sigma_a \geq \sigma_c + 1$. Au vu de ce que l'on vient de prouver, on a pour tout $x > 0$,

$$A^*(x) = \int_{\kappa+1-i\infty}^{\kappa+1+i\infty} F(s)x^s\frac{ds}{s}.$$

On veut donc montrer le résultat en faisant « glisser » l'intégrale de la droite $\sigma = \kappa + 1$ à la droite $\sigma = \kappa$.

Pour cela, soit $T > 1$. On applique la théorème des résidus, qui nous dit que pour tout $x > 0$,

$$\int_{R_T} F(s)x^s\frac{ds}{s} = 0,$$

où R_T est le rectangle de sommets $\kappa + 1 - iT, \kappa + 1 + iT, \kappa + iT$ et $\kappa - iT$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la majoration (3), on a

$$F(s)\frac{x^s}{s} \ll |\tau|^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}x^\sigma$$

uniformément pour tout $\sigma \in [\kappa, \sigma_c + 1]$ et $|\tau| \geq 1$.

Donc on a

$$\int_{\kappa+iT}^{\kappa+1+iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} \ll T^{-(\kappa-\sigma_c)+\varepsilon}x^{\kappa+1},$$

quantité qui tend vers 0 quand T tend vers $+\infty$ (pour ε assez petit).

De même, pour ε assez petit, on a

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+1-iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} \to 0$$

quand T tend vers $+\infty$.

Finalement on a

$$\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} = \int_{\kappa+1-iT}^{\kappa+1+iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} + o(1)$$

quand T tend vers $+\infty$, et l'intégrale de droite tend vers $A^*(x)$ quand T tend vers $+\infty$ d'après la première étape de la preuve. $\square$

Il existe également une variante effective de la formule de Perron, où l'on n'intègre que sur un domaine borné et où apparaît donc un terme d'erreur.

Théorème 12 (Formule de Perron effective)
Soit $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet de somme F et d'abscisse de convergence absolue σ_a finie.
Alors pour tout $\kappa > \max(0, \sigma_a)$ et pour tout $T, x \geq 1$,

$$A(x) := \sum_{n<x} a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} + O\left(x^\kappa \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{1+T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\kappa > \max(0, \sigma_a)$, on a uniformément en $y, T > 0$,

$$\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{y^s}{s}ds\right| \ll \frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}.$$

En effet, on aura alors en sommant pour $x \geq 1$,

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h\left(\frac{x}{n}\right) + O(a_x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} F(s)x^s\frac{ds}{s} + O\left(x^\kappa \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{1+T|\log\left(\frac{x}{n}\right)|}\right),$$

où le $O(a_x)$ dans le terme du milieu correspond au cas où $x \in \mathbb{N}^*$, et où l'interversion série-intégrale à droite est justifiée par la convergence uniforme de la série sur le segment d'intégration ($\kappa > \sigma_a$).

Or si $T|\log y| > 1$, on a

$$\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} y^s \frac{ds}{s}\right| \ll \frac{y^\kappa}{T|\log y|} \ll \frac{y^\kappa}{1+T|\log y|},$$

d'après le Lemme 1.

Maintenant si $T|\log y| \leq 1$ on écrit

$$\begin{aligned}\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| &= \left|h(y) - \frac{y^\kappa}{2i\pi}\left(\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s} + \int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\left(y^{i\tau}-1\right)\frac{ds}{s}\right)\right| \\ &\leq \left|h(y) - \frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| + \left|\frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\left(y^{i\tau}-1\right)\frac{ds}{s}\right|.\end{aligned}$$

On a

$$|y^{i\tau} - 1| = |\mathrm{e}^{i\tau\log y} - 1| \leq |\tau \log y|$$

car $|\tau| \leq T$ et $T|\log y| \leq 1$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\left(y^{i\tau}-1\right)\frac{ds}{s} &\ll y^\kappa \int_{-T}^{T}\left|\frac{\tau\log y}{\kappa+i\tau}\right| d\tau \\ &\ll y^\kappa T \log y \\ &\ll y^\kappa\end{aligned}$$

puisque $T|\log y| \leq 1$.

Ensuite, si $y = 1$ alors d'après le Lemme 1 on a

$$\left|h(y) - \frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| \ll \frac{\kappa}{T+\kappa} \ll 1 = y^\kappa.$$

Si $y < 1$ alors $h(y) = 0$ et on a

$$\left|h(y) - \frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| = y^\kappa\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| \ll y^\kappa$$

car l'intégrale converge quand T tend vers $+\infty$. Enfin si $y > 1$, on a $h(y) = 1$ et

$$\begin{aligned}\left|1 - \frac{y^\kappa}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| &= y^\kappa\left|\frac{1}{y^\kappa} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| \\ &\leq y^\kappa\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{ds}{s}\right| + y^\kappa\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{y^\kappa}\right| \\ &\ll y^\kappa.\end{aligned}$$

Finalement, puisque $T|\log y| \leq 1$, on a

$$\left|h(y) - \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT} \frac{y^s}{s} ds\right| \ll y^\kappa \ll \frac{y^\kappa}{1+T|\log y|}.$$

$\square$

5) La formule du crible

Les méthodes de cribles sont des méthodes permettant d'estimer la taille d'un certain ensemble d'entiers ne possédant pas de facteurs premiers appartenant à un ensemble de nombres premiers fixé. Le premier crible utilisé dans l'histoire de l'arithmétique est le crible d'Eratosthène [18].

Intuitivement, on fixe un grand entier N et on souhaite trouver tous les nombres premiers inférieurs à N et premiers avec un certain entier m. Pour cela on écrit la liste des entiers de 2 à N et on barre tous les entiers de la liste divisibles par les différents facteurs premiers de m. Si ces facteurs sont $p_1, p_2, \ldots, p_r$, on barre successivement les entiers de la liste divisibles $p_1, p_1p_2, \ldots, p_1p_2\ldots p_r$. En prenant en compte les entiers barrés plusieurs fois, on trouve que le nombre d'entiers inférieurs à N et premiers avec m est

$$\sum_{d|m} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor,$$

où μ est la fonction de Möbius [19]. En choisissant $m = \prod_{p \leq \sqrt{N}} p$, les nombres inférieurs à N et premiers avec m sont les nombres premiers dans l'intervalle $]\sqrt{N}, N]$. On obtient donc la formule

$$\pi(N) - \pi(\sqrt{N}) + 1 = \sum_{P^+(d) \leq \sqrt{N}} \mu(d) \left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor.$$

Historiquement, Brun [20] a développé dans les années 10 une nouvelle méthode de crible, qui porte son nom, qui lui permit par exemple de montrer que la série des inverses des nombres premiers jumeaux (c'est-à-dire de la forme $(p, p+2)$) converge. Depuis, de nombreuses autres méthodes de cribles ont été créées, et celles-ci constituent un domaine de recherche très actif en théorie des nombres. Nous allons utiliser sans le démontrer le lemme fondamental du crible de Selberg [21], comme il est énoncé dans [1].

Théorème 13 (Lemme fondamental du crible de Selberg)
Soient $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers et $\mathcal{A}$ un ensemble d'entiers naturels de cardinal X. Pour tout entier d on note $\mathcal{A}_d = \{n \in \mathcal{A}, d \mid n\}$. Pour tout entier z on note $\mathcal{P}(z) = \prod_{p \leq z, p \in \mathcal{P}} p$ (de sorte qu'un nombre premier p divise $\mathcal{P}(z)$ si et

18. Eratosthène III$^{\text{ème}}$ siècle avant J.-C.
19. August Ferdinand Möbius (1790-1868)
20. Viggo Brun (1885-1978)
21. Atle Selberg (1917-2007)

seulement si $p \leq z$ et $p \in \mathcal{P}$).

On suppose qu'il existe deux fonctions w et R telles que pour tout entier d on ait $card(\mathcal{A}_d) = \frac{Xw(d)}{d} + R(d)$ et que w soit multiplicative (i.e. $w(nm) = w(n)w(m)$ si $(n,m) = 1$).

S'il existe $c \geq 0$ tel que pour tous réels η et ξ avec $2 \leq \eta \leq \xi$ on ait

$$\sum_{\eta \leq p \leq \xi} \frac{w(p)\log p}{p} \leq \log\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + C,$$

s'il existe $c' \geq 0$ tel que pour tout nombre premier p on ait

$$\frac{w(p)}{p} \leq 1 - c'$$

et si pour tout entier d on a

$$|R(d)| \leq \omega(d),$$

où $\omega(d)$ est le nombre de diviseurs premiers de d (sans multiplicité), alors on a uniformément en $\mathcal{A}, X$ et z

$$card(n \in \mathcal{A}, p \mid n \Rightarrow p \nmid \mathcal{P}(z)) = X \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{w(p)}{p}\right)\left(1 + O\left(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right)\right), \qquad (4)$$

où $u = \frac{\log X}{\log z}$.

Énonçons maintenant les deux premiers théorèmes de Mertens[22] (voir Annexe C), qui vont nous servir à vérifier les hypothèses du lemme fondamental et à estimer le produit de (4) dans le cas qui va nous intéresser.

Théorème 14 (Premier théorème de Mertens)
On a

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Théorème 15 (Second théorème de Mertens)
On a

$$\prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-c}}{\log x}\left(1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

où $c > 0$ est une constante.

22. Franz Mertens (1840-1927)

Remarque : En fait $c = \gamma$ où

$$\gamma := \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

est la constante d'Euler mais nous n'aurons pas besoin de déterminer cette constante.

On en déduit le résultat suivant qui nous servira plus tard :

Corollaire 1 *Soient P et Q deux nombres réels supérieurs à 2 et X un entier naturel supérieur à 2 tels que $P \leq Q \leq X$. Alors*

$$\sum_{\substack{n \sim X \\ p|n \Rightarrow p \notin [P,Q]}} 1 \ll X \frac{\log P}{\log Q}.$$

Démonstration. On va appliquer le lemme fondamental du crible de Selberg avec $\mathcal{A} = [X, 2X]$ et $\mathcal{P} = \{p \geq P\}$.

On a donc pour tout entier non nul d

$$card(\mathcal{A}_d) = \left\lfloor \frac{X+1}{d} \right\rfloor = \frac{X}{d} + R(d),$$

avec $|R(d)| \leq \max\left(\frac{1}{d}, 1 - \frac{1}{d}\right) \leq 1$.

Ainsi notre fonction w est la fonction constante égale à 1, qui est bien multiplicative et on a bien $|R(d)| \leq \omega(d)$ pour tout entier d. De plus pour tout nombre premier p on a

$$\frac{w(p)}{p} = \frac{1}{p} \leq 1 - \frac{1}{2}$$

et on a pour tous réels η et ξ tels que $2 \leq \eta \leq \xi$

$$\sum_{\eta \leq p \leq \xi} \frac{w(p) \log p}{p} \leq \log\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + O(1)$$

en soustrayant la somme jusqu'à η à la somme jusqu'à ξ dans le premier théorème de Mertens.

Notre ensemble $\mathcal{A}$ vérifie donc toutes les hypothèses du lemme fondamental et on a donc

$$card(n \in \mathcal{A}, p|n \Rightarrow p \nmid \mathcal{P}(Q)) = (X+1) \prod_{\substack{p \leq Q \\ p \in \mathcal{P}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\mathrm{e}^{-\frac{u}{2}}\right)\right),$$

avec $u = \frac{\log(X+1)}{\log Q}$.

Or $\mathcal{P} = \{p \geq P\}$ donc $\mathcal{P}(Q) = \prod_{P \leq p \leq Q} p$ et donc la condition $p \nmid \mathcal{P}(Q)$ est équivalente à $p \notin [P, Q]$. De même la condition $p \leq Q$ et $p \in \mathcal{P}$ est équivalente à $p \in [P, Q]$. Ainsi le terme gauche n'est autre que

$$\sum_{\substack{n \sim X \\ p|n \Rightarrow p \notin [P,Q]}} 1$$

et le produit dans le terme de droite est

$$\prod_{P \leq p \leq Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

De plus, $\mathrm{e}^{\frac{u}{2}} \geq 1$ donc le terme d'erreur peut être grossièrement remplacé par $O(1)$, et on a $X + 1 \ll X$.

On a donc finalement

$$\sum_{\substack{n \sim X \\ p|n \Rightarrow p \notin [P,Q]}} 1 \ll X \prod_{P \leq p \leq Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

et ce produit est $\ll \frac{\log P}{\log Q}$ en prenant le quotient du produit jusqu'à Q par le produit jusqu'à P dans le second théorème de Mertens. $\square$

Partie II : Le théorème de Matomäki et Radziwiłł

1) Objectifs

Énonçons tout d'abord le théorème principal de l'article de Matomäki et Radziwiłł :

Théorème 16 (Matomäki et Radziwiłł, 2015)
Soit $\delta > 0$. Pour presque tout $x \in [X, 2X]$, on a

$$\sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) = o(X^\delta)$$

quand $X \to +\infty$.

Ici « pour presque tout $x \in [X, 2X]$ » signifie que le cardinal de l'ensemble exceptionnel des x ne vérifiant pas la propriété est $o(\operatorname{card}([X, 2X])) = o(X)$.

Proposition 2 *Le théorème 16 découle de la majoration suivante*

$$\int_X^{2X} \left| \frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) \right|^2 dx \ll_\varepsilon \frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \tag{5}$$

où $\delta, \varepsilon > 0$.

Démonstration. Soient $\delta, \varepsilon > 0$. Fixons $X \in \mathbb{N}^*$ et posons

$$f(x) := \frac{(\log X)^{\frac{1}{9}}}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n)$$

pour $x \in [X, 2X]$.

L'inégalité de Bienaymé [23]-Tchebychev [24] appliquée avec la mesure de comptage m à la fonction f donne

$$m(x \in [X, 2X], |f(x)| \geq 1) \leq \int_X^{2X} |f(x)|^2 dm(x).$$

Or

$$\int_X^{2X} |f(x)|^2 dm(x) = (\log X)^{\frac{2}{9}} \int_X^{2X} \left| \frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) \right|^2 dm(x) \ll_\varepsilon \frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{9}-\varepsilon}}$$

par hypothèse, et

$$\frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{9}-\varepsilon}} = o(X) \text{ quand } X \to +\infty.$$

De plus $m(x \in [X, 2X], |f(x)| \geq 1)$ n'est autre que le cardinal de l'ensemble des $x \in [X, 2X]$ tels que

$$\left| \frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) \right| \geq \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{9}}},$$

qui contient l'ensemble exceptionnel des $x \in [X, 2X]$ tels que

$$\frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x+X^\delta} \lambda(n) \not\to 0 \text{ quand } X \to +\infty.$$

Finalement, le cardinal de l'ensemble exceptionnel est bien $o(X)$ quand $X \to +\infty$, ce qui donne le résultat. $\square$

Ainsi le but de l'article de Matomäki et Radziwiłł (et donc de ce mémoire) est de démontrer cette majoration. Pour cela, il va falloir montrer plusieurs lemmes.

2) Lemmes

Tout d'abord, commencer par majorer la quantité qui nous intéresse (*i.e.* le membre de gauche de (5)) par des quantités que l'on pourra analyser grâce aux méthodes de la Partie I.

23. Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878)
24. Pafnouti Tchebychev (1821-1894)

Lemme 2 *Soit $\delta > 0$. Alors*

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{X^\delta}\sum_{x\le n\le x+X^\delta}\lambda(n)\right|^2 dx \ll \int_0^{X^{1-\delta}}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt+\max_{T>X^{1-\delta}}\frac{X^{1-\delta}}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt.$$

Démonstration. Posons $h := X^\delta$ et pour $n \le 1$,

$$a_n := \lambda(n)\mathbb{1}_{[X,2X]}(n).$$

D'après la formule de Perron appliquée à la série de Dirichlet $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ on a alors pour tout $x \in [X, 2X]$,

$$\frac{1}{h}\sum_{x\le n\le x+h}\lambda(n) = \frac{1}{h}\frac{1}{2i\pi}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^s}\frac{(x+h)^s-x^s}{s}ds. \tag{6}$$

À partir de maintenant, posons pour $s \in]1-i\infty, 1+i\infty[$,

$$F(s) := \sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^s}.$$

Puisque pour tout $s \in]1-i\infty, 1+i\infty[$ on a

$$\overline{F(s)\frac{(x+h)^s-x^s}{s}} = F(\overline{s})\frac{(x+h)^{\overline{s}}-x^{\overline{s}}}{\overline{s}},$$

en passant au module carré et en intégrant dans (6), il suffit de majorer

$$V := \frac{1}{Xh^2}\int_X^{2X}\left|\int_1^{1+i\infty}\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^s}\frac{(x+h)^s-x^s}{s}ds\right|^2 dx.$$

Pour cela, commençons par transformer le terme $\frac{(x+h)^s-x^s}{s}$. Pour tout $x \in [X, 2X]$ et tout $s \in [1, 1+i\infty]$, on a

$$\begin{aligned}\frac{(x+h)^s-x^s}{s} &= \frac{1}{2h}\int_h^{3h}\frac{(x+h)^s-x^s}{s}dw\\ &= \frac{1}{2h}\left(\int_h^{3h}\frac{(x+w)^s-x^s}{s}dw-\int_h^{3h}\frac{(x+w)^s-(x+h)^s}{s}dw\right)\\ &= \frac{x}{2h}\int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}}x^s\frac{(1+u)^s-1}{s}du-\frac{x+h}{2h}\int_0^{\frac{2h}{x+h}}(x+h)^s\frac{(1+u)^s-1}{s}du\end{aligned}$$

par les changements de variables $u = \frac{w}{x}$ et $u = \frac{w-h}{x+h}$.

On ne va étudier que le terme de gauche, les majorations du terme de droite étant similaires. Ainsi on peut considérer qu'on a

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{h^2 X} \int_X^{2X} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) \frac{x}{2h} \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} duds \right|^2 dx \\
&= \frac{1}{4h^4 X} \int_X^{2X} x^2 \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} duds \right|^2 dx \\
&\ll \frac{X}{h^4} \int_X^{2X} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} duds \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini [25], il vient

$$V \ll \frac{X}{h^4} \int_X^{2X} \left| \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} dsdu \right|^2 dx.$$

Ensuite on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz [26], ce qui donne

$$\begin{aligned}
V &\ll \frac{X}{h^4} \int_X^{2X} \frac{2h}{x} \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dudx \\
&\ll \frac{1}{h^3} \int_X^{2X} \int_{\frac{h}{x}}^{\frac{3h}{x}} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dudx.
\end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le théorème de Fubini, puis en agrandissant l'intervalle d'intégration de la seconde intégrale on trouve

$$\begin{aligned}
V &\ll \frac{1}{h^3} \int_{\frac{h}{2X}}^{\frac{3h}{X}} \int_{\frac{h}{u}}^{\frac{3h}{u}} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dxdu \\
&\ll \frac{1}{h^3} \int_{\frac{h}{2X}}^{\frac{3h}{X}} \int_X^{2X} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dxdu.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après le théorème de la moyenne on a

$$V \ll \frac{1}{h^2 X} \int_X^{2X} \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dxdu$$

pour un certain u dans $[\frac{h}{2X}, \frac{3h}{X}]$, *i.e.* $u \ll \frac{h}{X}$.

---

25. Guido Fubini (1879-1943)
26. Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Maintenant, on introduit une fonction g de classe C^∞ à support inclus dans $[\frac{1}{2}, 4]$, positive et valant 1 sur $[1, 2]$. On a alors

$$V \ll \frac{1}{h^2 X} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) \left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 dx du.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_1^{1+i\infty} F(s) x^s \frac{(1+u)^s - 1}{s} ds \right|^2 \\
&= \left(\int_1^{1+i\infty} F(s_1) x^{s_1} \frac{(1+u)^{s_1} - 1}{s_1} ds_1 \right) \overline{\left(\int_1^{1+i\infty} F(s_2) x^{s_2} \frac{(1+u)^{s_2} - 1}{s_2} ds_2 \right)} \\
&= \left(\int_1^{1+i\infty} F(s_1) x^{s_1} \frac{(1+u)^{s_1} - 1}{s_1} ds_1 \right) \left(\int_1^{1+i\infty} \overline{F(s_2) x^{s_2} \frac{(1+u)^{s_2} - 1}{s_2}} ds_2 \right)
\end{aligned}$$

par continuité de $z \mapsto \overline{z}$ et convergence de l'intégrale.

On applique alors deux fois le théorème de Fubini, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
V &\ll \frac{1}{h^2 X} \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) \left(\int_1^{1+i\infty} F(s_1) x^{s_1} \frac{(1+u)^{s_1} - 1}{s_1} ds_1 \right) \\
&\quad \times \left(\int_1^{1+i\infty} \overline{F(s_2)} x^{\overline{s_2}} \frac{\overline{(1+u)^{s_2} - 1}}{\overline{s_2}} ds_2 \right) dx du \\
&\ll \frac{1}{h^2 X} \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} |F(s_1) \overline{F(s_2)}| \left| \frac{(1+u)^{s_1} - 1}{s_1} \frac{\overline{(1+u)^{s_2} - 1}}{\overline{s_2}} \right| \left| \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) x^{s_1 + \overline{s_2}} dx \right| ds_1 ds_2 \\
&\ll \frac{1}{h^2 X} \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} |F(s_1) F(s_2)| \left| \frac{(1+u)^{s_1} - 1}{s_1} \frac{(1+u)^{s_2} - 1}{s_2} \right| \left| \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) x^{s_1 + \overline{s_2}} dx \right| ds_1 ds_2.
\end{aligned}$$

Écrivons alors $s_1 = 1 + it_1$ et $s_2 = 1 + it_2$. La troisième intégrale peut être estimée par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) x^{s_1 + \overline{s_2}} dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) x^{2 + i(t_1 - t_2)} dx \right| \\
&= \frac{1}{X} \left| \int_{\mathbb{R}} g'\left(\frac{x}{X}\right) \frac{x^{3 + i(t_1 - t_2)}}{3 + i(t_1 - t_2)} dx \right| \\
&= \frac{1}{X^2} \left| \int_{\mathbb{R}} g''\left(\frac{x}{X}\right) \frac{x^{4 + i(t_1 - t_2)}}{(4 + i(t_1 - t_2))(3 + i(t_1 - t_2))} dx \right|,
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que g, ainsi que toutes ses dérivées, sont à support compact, et donc que les termes de bord sont nuls. Utilisant de plus que g'' est bornée et que l'intervalle d'intégration est de longueur $\ll X$, on obtient

$$\left|\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x}{X}\right) x^{s_1+\overline{s_2}} dx\right| \ll \frac{X^3}{1+(t_1-t_2)^2}.$$

On a également

$$\frac{(1+u)^{s_1}-1}{s_1} \ll \frac{1}{t_1}$$

car

$$|(1+u)^{s_1}-1| \leq \left|(1+u)^{1+it_1}\right| + 1 = u+2 \ll \frac{h}{X} + 1 \ll 1$$

et $|s_1| = |1+it_1| \geq t_1$.

De plus,

$$\frac{(1+u)^{s_1}-1}{s_1} = \frac{\mathrm{e}^{s_1 \log(1+u)}-1}{s_1} \ll \frac{|s_1| \log(1+u)}{|s_1|} \leq u \ll \frac{h}{X}.$$

Donc

$$\frac{(1+u)^{s_1}-1}{s_1} \ll \min\left(\frac{h}{X}, \frac{1}{t_1}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned} V &\ll \frac{1}{h^2 X} \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} |F(s_1)F(s_2)| \min\left(\frac{h}{X}, \frac{1}{t_1}\right) \min\left(\frac{h}{X}, \frac{1}{t_2}\right) \frac{X^3}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2 \\ &= \frac{X^2}{h^2} \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{\left|F(s_1) \min\left(\frac{h}{X}, \frac{1}{t_1}\right)\right| \left|F(s_2) \min\left(\frac{h}{X}, \frac{1}{t_2}\right)\right|}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité classique $a^2+b^2 \geq 2ab$ on a

$$V \ll \frac{X^2}{h^2} \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{|F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right) + |F(s_2)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_2^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2.$$

On remarque que l'intégrale ci-dessus est égale à

$$\begin{aligned} &\int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{|F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} + \frac{|F(s_2)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_2^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2 \\ &= \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{|F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2 + \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{|F(s_2)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_2^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} ds_1 ds_2 \\ &= 2 \int_1^{1+i\infty} \int_1^{1+i\infty} \frac{|F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right)}{1+(t_1-t_2)^2} ds_2 ds_1 \end{aligned}$$

en inversant l'ordre d'intégration par le théorème de Fubini.

Cette dernière intégrale vaut également

$$\int_1^{1+i\infty} |F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right) \left(\int_1^{1+i\infty} \frac{1}{1+(t_1-t_2)^2} ds_2\right) ds_1$$
$$\ll \int_1^{1+i\infty} |F(s_1)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t_1^2}\right) ds_1,$$

car la deuxième intégrale est $\ll 1$ uniformément en $t_1 \geq 0$.

On a donc

$$V \ll \frac{X^2}{h^2} \int_1^{1+i\infty} |F(s)|^2 \min\left(\frac{h^2}{X^2}, \frac{1}{t^2}\right) ds.$$

Scindant l'intégrale à $\frac{X}{h}$, on obtient

$$V \ll \int_1^{1+i\frac{X}{h}} |F(s)|^2 ds + \frac{X^2}{h^2} \int_{1+i\frac{X}{h}}^{1+i\infty} \frac{|F(s)|^2}{t^2} ds.$$

On rappelle que l'on a $h = X^\delta$ et $F(s) = \sum\limits_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n}$, donc la première intégrale vaut bien

$$\int_0^{X^{1-\delta}} \left|\sum_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt,$$

et la seconde vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{1+2^n i\frac{X}{h}}^{1+2^{n+1} i\frac{X}{h}} \frac{|F(s)|^2}{t^2} ds &\ll \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\left(2^n \frac{X}{h}\right)^2} \int_{1+2^n i\frac{X}{h}}^{1+2^{n+1} i\frac{X}{h}} |F(s)|^2 ds \\
&\ll \frac{h}{X} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \max_{T>\frac{X}{h}} \frac{1}{T} \int_{1+iT}^{1+2iT} |F(s)|^2 ds\right) \\
&\ll \frac{h}{X} \max_{T>\frac{X}{h}} \frac{1}{T} \int_{1+iT}^{1+2iT} |F(s)|^2 ds \\
&= \frac{h}{X} \max_{T>\frac{X}{h}} \frac{1}{T} \int_T^{2T} \left|\sum_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} \left|\frac{1}{X^\delta} \sum_{x\leq n\leq x+X^\delta} \lambda(n)\right|^2 dx \ll \int_0^{X^{1-\delta}} \left|\sum_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt + \max_{T>X^{1-\delta}} \frac{X^{1-\delta}}{T} \int_T^{2T} \left|\sum_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt. \square$$

Le prochain lemme nous servira plus tard à majorer l'intégrale de (6) au voisinage de 0.

Lemme 3 *Soit $A > 0$. Alors on a uniformément en $|t| \leq (\log X)^{-A}$*

$$\sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \ll_A (\log X)^{-A}.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que pour tout $u \in [X, 2X]$ et tout $B > 0$,

$$\sum_{X \leq n \leq u} \frac{\lambda(n)}{n} \ll_B (\log X)^{-B}.$$

On a vu que par la version forte du théorème des nombres premiers, on a

$$L(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n) \ll_B \frac{x}{(\log x)^B} \tag{7}$$

pour tout $B > 0$.

Soient u dans $[X, 2X]$ et $B > 0$,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{X \leq n \leq u} \frac{\lambda(n)}{n} \right| &= \left| \int_X^u \frac{d(L(t))}{t} \right| \\
&= \left| \frac{L(u)}{u} - \frac{L(X)}{X} + \int_X^u \frac{L(t)}{t^2} dt \right| \\
&\leq \left| \frac{L(u)}{u} \right| + \left| \frac{L(X)}{X} \right| + \int_X^{2X} \frac{|L(t)|}{t^2} dt \\
&\ll_B \frac{u}{u(\log u)^B} + \frac{X}{X(\log X)^B} + \int_X^{2X} \frac{dt}{t(\log t)^{B+1}} \\
&\ll_B \frac{1}{(\log X)^B} + \frac{1}{B} \left[(\log(2X))^{-B} - (\log(X))^{-B} \right] \\
&\ll_B (\log X)^{-B}
\end{aligned}$$

en appliquant la majoration (7) avec B pour les termes de bords et avec $B+1$ sous l'intégrale.

Soit maintenant t dans $\left[-(\log X)^{-A}, (\log X)^{-A}\right]$. En appliquant la majoration (7) avec A pour le terme de bord et $2A$ pour le terme sous l'intégrale, et par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right| &= \left|\int_X^{2X}\frac{1}{u^{it}}d\left(\sum_{X\leq n\leq u}\frac{\lambda(n)}{n}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{(2X)^{it}}\sum_{n\sim x}\frac{\lambda(n)}{n} - X^{-it}\frac{\lambda(X)}{X} + it\int_X^{2X}\frac{1}{u^{1+it}}\sum_{X\leq n\leq u}\frac{\lambda(n)}{n}du\right| \\
&\ll_A \left|\sum_{n\sim x}\frac{\lambda(n)}{n}\right| + \frac{1}{X} + \frac{|t|}{X}.X(\log X)^{-2A} \\
&\ll_A (\log X)^{-A} + (\log X)^{-A} + (\log X)^{A}.(\log X)^{-2A} \\
&\ll_A (\log X)^{-A},
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $|\lambda(X)| = 1$ et $X \gg_A (\log X)^A$. □

Le prochain lemme est une majoration d'un autre type de « polynôme de Dirichlet ».

Lemme 4 *Soient $A > 0$, θ dans $]\frac{2}{3}, 1[$ et P et Q des réels tels que*

$$\exp((\log X)^{\theta}) \leq P \leq Q \leq X.$$

Posons pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{P}(1+it) := \sum_{P\leq p\leq Q}\frac{1}{p^{1+it}}.$$

Alors pour tout $t \in [-X, X]$, on a

$$|\mathcal{P}(1+it)| \ll_A \frac{\log X}{1+|t|} + (\log X)^{-A}.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que dans le cas où t est borné le résultat est immédiat avec le théorème des nombres premiers.

En effet, fixons un entier N et imposons $|t| \leq N$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(1+it) &= \sum_{P\leq p\leq Q}\frac{1}{p^{1+it}} \\
&= \int_P^Q u^{-1-it}d(\pi(u)) \\
&= \frac{\pi(Q)}{Q^{1+it}} - \frac{\pi(P)}{P^{1+it}} + (1+it)\int_P^Q\frac{\pi(u)}{u^{2+it}}du.
\end{aligned}$$

En utilisant la version faible du théorème des nombres premiers : $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ quand $x \to +\infty$, on obtient l'estimation grossière $\pi(x) \ll \frac{x}{\log x}$, d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(1+it) &\ll \frac{1}{\log P} + |t| \int_P^Q \frac{du}{u \log u} \\ &\ll \frac{1}{(\log X)^\theta} + \log\log X \\ &\ll_A \frac{\log X}{|t|+1} + (\log X)^{-A},\end{aligned}$$

car $t \ll 1$ ici.

Les choses se compliquent lorsque l'on ne borne plus t. Considérons maintenant le cas $|t| \geq 4$. Pour ne pas avoir des termes de bords dans nos sommes (qui sont de la forme $\frac{1}{P^{1+it}}$ ou $\frac{1}{Q^{1+it}}$ et donc qui sont $O((\log X)^{-A})$), on peut supposer que $\{P\} = \{Q\} = \frac{1}{2}$, où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire du réel x.

Posons $\kappa := \frac{1}{\log X}$ et $T := \frac{|t|+1}{2}$. Pour $\sigma > 0$ on a d'après la formule d'Euler

$$\zeta(s+1+it) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{s+1+it}}\right)^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned}\log\zeta(s+1+it) &= \log\left(\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{s+1+it}}\right)^{-1}\right) \\ &= -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^{s+1+it}}\right) \\ &= \sum_p \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{kp^{k(s+1+it)}} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \sum_p \frac{1}{p^{k(s+1+it)}}\end{aligned}$$

par convergence absolue des deux séries.

Ainsi d'après la formule de Perron effective on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sum_{p}\frac{1}{p^{k(s+1+it)}}\frac{Q^s-P^s}{s}ds \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\sum_{p}\frac{1}{p^{k(s+1+it)}}\frac{Q^s-P^s}{s}ds \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{k(1+it)}}+O\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}R_k\right) \\
&= \mathcal{P}(1+it)+R+O\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}R_k\right)
\end{aligned}$$

où

$$R=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{k(1+it)}}$$

et

$$R_k=R_{k1}+R_{k2}=\sum_{p}\frac{Q^\kappa}{p^{k(\kappa+1)}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)}+\sum_{p}\frac{P^\kappa}{p^{k(\kappa+1)}\left(1+T\left|\log\frac{P}{p}\right|\right)}.$$

Pour majorer R on écrit

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{k(1+it)}} \\
&\ll \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n\ge P}\frac{1}{n^k} \\
&\ll \sum_{k=2}^{+\infty}\int_{P}^{+\infty}\frac{dt}{t^k} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{kP^{k-1}} \\
&\ll \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{P^k} \\
&= \frac{1}{P-1} \\
&\ll \frac{1}{P}.
\end{aligned}$$

Maintenant nous allons majorer R_{11}. La majoration étant la même pour R_{12} on aura une majoration pour R_1.

Tout d'abord,

$$R_{11} = \sum_p \frac{Q^\kappa}{p^{\kappa+1}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)} \ll \sum_p \frac{1}{p^{\kappa+1}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)}$$

car

$$Q^\kappa = \mathrm{e}^{\frac{\log Q}{\log X}} \ll 1.$$

Scindons notre dernière somme en trois sous-sommes A, B et C. On a

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p,\left|\log\frac{Q}{p}\right|>1} \frac{1}{p^{\kappa+1}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)} \\ &\ll \frac{1}{T}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{\kappa+1}} \\ &\ll \frac{1}{T}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\kappa+1}} \\ &= \frac{1}{\kappa T} \\ &= \frac{\log X}{T}. \end{aligned}$$

B est la somme sur les p « proches de Q ». On fixe J tel que $2^J \leq Q^{\frac{1}{2}} \leq 2^{J+1}$ (de sorte que $J \ll \log Q \ll \log X$). Alors

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j\leq J}\ \sum_{Q\left(1+\frac{1}{2^{j+1}}\right)\leq p\leq Q\left(1+\frac{1}{2^j}\right)} \frac{1}{p^{\kappa+1}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)} \\ &\ll \sum_{j\leq J}\ \sum_{Q\left(1+\frac{1}{2^{j+1}}\right)\leq p\leq Q\left(1+\frac{1}{2^j}\right)} \frac{1}{Q\left(1+\frac{1}{2^{j+1}}\right)T\left(-\log\left(1+\frac{1}{2^j}\right)\right)} \\ &\ll \sum_{j\leq J}\frac{Q/2^{j+1}}{Q\left(1+\frac{1}{2^{j+1}}\right)T/2^j} \\ &\ll \frac{J}{T} \\ &\ll \frac{\log X}{T}. \end{aligned}$$

Enfin, C est la somme sur les nombres premiers restants, c'est-à-dire vérifiant

$$\left|\log\frac{Q}{p}\right| < 1 \text{ et } p \geq 2Q$$

et
$$\left|\log\frac{Q}{p}\right| < 1 \text{ et } p \leq Q\left(1+\frac{1}{2^{J+1}}\right).$$
Or
$$\left|\log\frac{Q}{p}\right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} p < Q \text{ et } Q < \mathrm{e}p \\ \text{ou} \\ p > Q \text{ et } p < \mathrm{e}Q \end{cases}$$

Donc
$$\begin{aligned} C &= \sum_{2Q<p<\mathrm{e}Q} + \sum_{\frac{Q}{\mathrm{e}}<p<Q} + \sum_{Q<p<Q\left(1+\frac{1}{2^{J+1}}\right)} \\ &\ll \frac{Q}{QT} + \frac{Q}{QT} + \frac{1/2^{J+1}}{QT} \\ &\ll \frac{1}{T} + \frac{1}{Q^{\frac{3}{2}}T} \\ &\ll \frac{\log X}{T}, \end{aligned}$$
où les termes des trois sommes sont
$$\frac{1}{p^{\kappa+1}\left(1+T\left|\log\frac{Q}{p}\right|\right)}.$$

Finalement on a
$$R_{11} \ll \frac{\log X}{T}.$$
Comme les majorations sont les mêmes pour R_{12} on a
$$R_1 \ll \frac{\log X}{T}.$$

Maintenant, pour tout entier $k \geq 2$, on utilise l'inégalité $x^k \geq kx$ pour $x \geq 2$, qui nous donne, en majorant de la même manière que précédemment,
$$R_k \ll \frac{1}{k}\frac{\log X}{T},$$
et finalement on a
$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k}R_k \ll \frac{\log X}{T}.$$

Donc
$$\mathcal{P}(1+it) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds + O\left(\frac{1}{P}+\frac{\log X}{T}\right).$$

Pour estimer cette intégrale, on va déplacer le segment d'intégration vers la gauche, en utilisant la région sans zéros de Vinogradov et Korobov. On sait que ζ ne s'annule pas pour $\sigma \geq 1 - \frac{c}{(\log|\tau|)^{\frac{2}{3}}(\log\log|\tau|)^{\frac{1}{3}}}$ et $|\tau| \geq 3$, où $c > 0$. Nous allons utiliser une région sans zéros légèrement plus petite : la fonction ζ ne s'annule pour $\sigma \geq 1 - \frac{1}{(\log|\tau|)^{\frac{2}{3}}(\log\log|\tau|)}$ et $|\tau| \geq 3$.

Ainsi, la fonction $s \mapsto \log\zeta(s+1+it)$ est bien définie et holomorphe pour

$$\Re\mathrm{e}(s+1+it) \geq 1 - \frac{1}{(\log|\Im m(s+1+it)|)^{\frac{2}{3}}\log\log|\Im m(s+1+it)|}$$

soit pour

$$\sigma \geq -\frac{1}{(\log|\Im m(s)+t|)^{\frac{2}{3}}\log\log|\Im m(s)+t|}.$$

Posons

$$\sigma_0 := \frac{1}{(\log X)^{\frac{2}{3}}\log\log X}.$$

Alors dans le rectangle R_T de sommets $\kappa - iT, \kappa + iT, -\sigma_0 + iT$ et $-\sigma_0 - iT$, cette condition est vérifiée car $|\Im m(s)+t| \leq T + |t| < 2|t| - 1$. Donc par le théorème des résidus on a

$$\begin{aligned}\int_{\kappa-iT}^{\kappa+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds = &\int_{\kappa-iT}^{-\sigma_0-iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds\\ &+\int_{-\sigma_0-iT}^{-\sigma_0+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds\\ &+\int_{-\sigma_0+iT}^{\kappa+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds.\end{aligned}$$

Or, en utilisant la majoration $\log\zeta(s) \ll \log\log|\tau|$ dans la région sans zéro, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\sigma_0+iT}^{\kappa+iT}\log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}\right| &\ll \frac{\log\log 2X}{T}\int_{-\sigma_0}^{\kappa}Q^u du\\ &= \frac{\log\log 2X}{T}\left(\frac{Q^\kappa - Q^{-\sigma_0}}{\log Q}\right)\\ &\ll \frac{\log X}{T},\end{aligned}$$

car

$$Q^\kappa \ll 1$$

et

$$Q^{-\sigma_0} \ll 1.$$

De même,

$$\int_{\kappa-iT}^{-\sigma_0-iT} \log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds \ll \frac{\log X}{T}.$$

Rassemblant ces estimations, on a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(1+it) &= \frac{1}{2i\pi}\int_{-\sigma_0-iT}^{-\sigma_0+iT} \log\zeta(s+1+it)\frac{Q^s-P^s}{s}ds + O\left(\frac{\log X}{T}+\frac{1}{P}\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \log\zeta(-\sigma_0+1+i(t+u))\frac{Q^{-\sigma_0+iu}-P^{-\sigma_0+iu}}{-\sigma_0+iu}du + O\left(\frac{\log X}{T}+\frac{1}{P}\right).\end{aligned}$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \log\zeta(-\sigma_0+1+i(t+u))\frac{Q^{-\sigma_0+iu}-P^{-\sigma_0+iu}}{-\sigma_0+iu}du &\ll \log\log 2X P^{-\sigma_0}\int_{-T}^{T}\frac{du}{\sqrt{\sigma_0^2+u^2}}\\ &= P^{-\sigma_0}\log X\frac{1}{\sigma_0^4}\int_{-T}^{T}\frac{du}{\sqrt{1+\frac{u^2}{\sigma_0^2}}}\\ &\ll P^{-\sigma_0}(\log X)^4 \text{argsh}\left(\frac{T}{\sigma_0}\right).\end{aligned}$$

En utilisant le formule bien connue

$$\text{argsh}(x) = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_{-T}^{T} \log\zeta(-\sigma_0+1+i(t+u))\frac{Q^{-\sigma_0+iu}-P^{-\sigma_0+iu}}{-\sigma_0+iu}du &\ll P^{-\sigma_0}(\log X)^4\log\left(\frac{T}{\sigma_0}+\sqrt{1+\frac{T^2}{\sigma_0^2}}\right)\\ &\ll P^{-\sigma_0}(\log X)^6\end{aligned}$$

car $T \leq X$ et

$$\frac{1}{\sigma_0} = (\log X)^{\frac{2}{3}}\log\log X.$$

Or

$$\begin{aligned}P^{-\sigma_0} &= \exp\left(-\frac{\log P}{(\log X)^{\frac{2}{3}}\log\log X}\right)\\ &\ll \exp\left(-\frac{(\log X)^{\theta-\frac{2}{3}}}{\log\log X}\right)\\ &\ll_A (\log X)^{-A}\end{aligned}$$

pour tout $A > 0$ car $\theta > \frac{2}{3}$.

Finalement, pour tout $A > 0$, on a

$$\mathcal{P}(1+it) \ll_A (\log X)^{-A} + \frac{\log X}{|t|+1}$$

car $P \geq \exp\left((\log X)^{\theta}\right)$ d'où $\frac{1}{P} \ll_A (\log X)^{-A}$. □

Lemme 5 *Soient $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes et $T > 0$. Alors*

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{1 \leq n \leq X} a_n n^{it} \right|^2 dt \ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq X} |a_n|^2.$$

Démonstration. Posons

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \leq -X \\ 1 + \frac{t}{X} \text{ si } -X < t \leq 0 \\ 1 \text{ si } 0 < t \leq T \\ 1 - \frac{t-T}{X} \text{ si } T < t \leq T+X \\ 0 \text{ si } t > T+X \end{cases}$$

La fonction f est à valeurs positives et vaut 1 sur $[0, T]$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \sum_{1 \leq n \leq X} a_n n^{it} \right|^2 dt &= \int_0^T f(t) \sum_{1 \leq m,n \leq X} a_m \overline{a_n} m^{it} n^{-it} dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} f(t) \sum_{1 \leq m,n \leq X} a_m \overline{a_n} \left(\frac{m}{n}\right)^{it} dt \\ &= \sum_{1 \leq m,n \leq X} a_m \overline{a_n} F\left(\frac{m}{n}\right) \end{aligned}$$

où

$$F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) x^{it} dt.$$

On a $F(1) = T + X$ et puisque f est à support dans $[-X, T+X]$ on a pour $x \neq 1$

$$\begin{aligned} F(x) &\leq \int_{-X}^{0} \left(1 + \frac{t}{X}\right) x^{it} dt + \int_0^T x^{it} dt + \int_T^{T+X} \left(1 - \frac{t-T}{X}\right) x^{it} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où par intégration par parties on a

$$I_1 = \frac{1 - x^{IX}}{i \log X} + \frac{1}{X}\left(\left[t\frac{x^{it}}{i\log x}\right]_{-X}^{0} - \int_{-X}^{0} \frac{x^{it}}{i\log x}dt\right)$$
$$= \frac{1 - x^{-iX}}{i \log x} + \frac{1}{X}\left(\frac{Xx^{-iX}}{i\log x} + \frac{1 - x^{-iX}}{(\log x)^2}\right),$$

$$I_2 = \frac{x^{iT}}{i\log x},$$

et

$$I_3 = \frac{x^{i(T+X)} - x^{iT}}{i\log x}\left(1 + \frac{T}{X}\right) - \frac{1}{X}\left(\left[t\frac{x^{it}}{i\log x}\right]_{T}^{T+X} - \int_{T}^{T+X} \frac{x^{it}}{i\log x}dt\right)$$
$$= \frac{x^{i(T+X)} - x^{iT}}{i\log x}\left(1 + \frac{T}{X}\right) - \frac{1}{X}\left((T+X)\frac{x^{i(T+X)}}{i\log x} - T\frac{x^{iT}}{i\log x} + \frac{x^{i(T+X)} - x^{iT}}{(\log x)^2}\right).$$

En sommant les valeurs de ces intégrales on a

$$F(x) = \frac{1 - x^{-iX} - x^{i(T+X)} + x^{iT}}{X(\log x)^2} \ll \frac{1}{X}(\log x)^{-2}.$$

Donc pour tous entiers $m, n \leq X$ avec $m \neq n$ on a

$$\begin{aligned} F\left(\frac{m}{n}\right) &\ll \frac{1}{X}\left(\log\left(\frac{m}{n}\right)\right)^{-2} \\ &\ll \frac{1}{X}\left(\log\left(\frac{m-n}{m+n}\right)\right)^{-2} \\ &\ll \frac{1}{X}\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^{2} \\ &\ll \frac{X}{(m-n)^2} \end{aligned}$$

par croissance de la fonction log et car $m + n \leq 2X$.

Finalement, on a

$$\int_0^T \left|\sum_{1\leq n\leq X} a_n n^{it}\right|^2 dt \leq (T+X)\sum_{1\leq n\leq X}|a_n|^2 + O\left(X \sum_{\substack{1\leq m,n\leq X \\ m\neq n}} |a_m a_n| \frac{1}{(m-n)^2}\right).$$

Or en utilisant l'inégalité classique $2ab \leq a^2 + b^2$ et le fait que $\frac{1}{(m-n)^2} \leq 1$ pour m, n entiers avec $m \neq n$, on a

$$X \sum_{\substack{1 \leq m,n \leq X \\ m \neq n}} |a_m a_n| \frac{1}{(m-n)^2} \ll X \sum_{1 \leq n \leq X} |a_n|^2$$

$$\ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq X} |a_n|^2$$

et donc

$$\int_0^T \left| \sum_{1 \leq n \leq X} a_n n^{it} \right|^2 dt \ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq X} |a_n|^2.$$

On obtient de même

$$\int_{-T}^0 \left| \sum_{1 \leq n \leq X} a_n n^{it} \right|^2 dt \ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq X} |a_n|^2$$

en considérant la fonction $g : t \mapsto f(t+T)$. □

On en déduit le corollaire suivant qui va intervenir plusieurs fois dans la démonstration de (5).

Corollaire 3 *Soient $(a_n)_n$ une suite de nombres complexes et $T > 0$. Alors*

$$\int_{-T}^T \left| \sum_{1 \leq n \leq X} \frac{a_n}{n^{1+it}} \right|^2 dt \ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq X} \frac{|a_n|^2}{n^2}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la suite $(b_n)_n$ définie par

$$b_n := \frac{a_n}{n} \mathbb{1}_{[X,2X]}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^T \left| \sum_{n \sim X} \frac{a_n}{n^{1+it}} \right|^2 dt &= \int_{-T}^T \left| \sum_{1 \leq n \leq 2X} b_n n^{it} \right|^2 dt \\
&= \int_{-T}^T \left| \sum_{1 \leq n \leq 2X} \frac{b_n}{n^{it}} \right|^2 dt \\
&\ll (T+2X) \sum_{1 \leq n \leq 2X} |b_n|^2 \\
&\ll (T+X) \sum_{1 \leq n \leq 2X} |b_n|^2 \\
&= (T+X) \sum_{n \sim X} \frac{|a_n|^2}{n^2}
\end{aligned}$$

où le passage à la seconde ligne se fait par le changement de variable $t \to -t$. $\square$

Il nous reste maintenant un dernier lemme à montrer avant d'avoir tous les ingrédients pour obtenir la majoration (5). On voit d'après le Lemme 2 qu'il suffit de majorer des intégrales de la forme

$$\int_0^T \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt.$$

Lemme 6 *Soient $\delta > 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit on a*

$$\int_0^T \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

Démonstration. Le Corollaire 3 donne

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt &\ll (T+X) \sum_{n \sim X} \frac{|\lambda(n)|^2}{n^2} \\ &= (T+X) \sum_{n \sim X} \frac{1}{n^2} \\ &\ll \left(\frac{T}{X} + 1 \right). \end{aligned}$$

Ce dernier majorant est $\ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}}$ quand $T > X$, donc on peut supposer $T \leq X$ dans la suite.

Posons $T_0 := (\log X)^{10}$. Par le Lemme 3, en choisissant $A = 20$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt &\ll \int_0^{T_0} (\log X)^{-20} dt \\ &= (\log X)^{-10} \\ &\ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}} \end{aligned}$$

car ce dernier terme tend vers $+\infty$ quand X tend vers $+\infty$ avec $T \leq X$.

On va maintenant étudier

$$\int_{T_0}^T \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt.$$

Posons $P := \exp\left((\log X)^{\frac{2}{3}+\varepsilon} \right)$ et $Q := X^{\frac{\delta}{3}}$. On va décomposer la somme $\sum\limits_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}$ de façon à faire intervenir les facteurs premiers de ces entiers $n \sim X$, pour utiliser la formule du crible du Corollaire 1 et le résultat du Lemme 4.

Tout d'abord on a clairement

$$\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}=\sum_{\substack{n\sim X\\ \exists p\in[P,Q],p|n}}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}+\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}.$$

Considérons un entier $n\sim X$ admettant un diviseur premier $p\in[P,Q]$ et notons $m=\frac{n}{p}$. On a donc une décomposition de n sous la forme mp avec $p\in[P,Q]$ et $m\sim\frac{X}{p}$. Or si m admet également un diviseur premier $q\in[P,Q]$, alors n admet également la décomposition $q.\left(\frac{m}{q}p\right)$ avec $\left(\frac{m}{q}p\right)\sim\frac{X}{q}$. Dans ce cas, si ce diviseur premier q de m est unique, l'entier n sera compté deux fois dans la somme

$$\sum_{P\leq p\leq Q}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{\lambda(mp)}{(mp)^{1+it}}$$

à cause des deux décompositions précédentes. Plus généralement, dans cette dernière somme, l'entier n sera compté $\mathrm{card}(p\in[P,Q],p|n)$ fois, ou encore $\mathrm{card}(q\in[P,Q]\text{ premier},q|m)+1$ pour les m correspondant. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\sim X\\ \exists p\in[P,Q],\ p|n}}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}&=\sum_{P\leq p\leq Q}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{\lambda(mp)}{(\mathrm{card}(q\in[P,Q]\text{ premier},q|m)+1)(mp)^{1+it}}\\&=-\sum_{P\leq p\leq Q}\frac{1}{p^{1+it}}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{\lambda(m)}{(\mathrm{card}(q\in[P,Q]\text{ premier},q|m)+1)m^{1+it}}\end{aligned}$$

car λ est complètement multiplicative et $\lambda(p)=-1$ pour tout nombre premier p.

En notant $a_m = \frac{\lambda(m)}{\mathrm{card}(q\in[P,Q] \text{ premier}, q|m)+1}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T} \left|\sum_{n\sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt &\leq \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{P\leq p\leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m\sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt + \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt \\
&\quad + 2\int_{T_0}^{T} \left|\left(\sum_{P\leq p\leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m\sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}}\right)\left(\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right)\right| dt \\
&\leq \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{P\leq p\leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m\sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt + \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt \\
&\quad + 2\left(\int_{T_0}^{T} \left|\sum_{P\leq p\leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m\sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{T_0}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{P\leq p\leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m\sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt + \int_{T_0}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité classique $2ab \leq a^2 + b^2$.

Pour évaluer la seconde intégrale, on agrandit l'intervalle d'intégration et on utilise le Corollaire 3 :

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt &\ll \int_{-T}^{T} \left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt \\
&\ll (T+X) \sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} \frac{1}{n^2} \\
&\ll (T+X)\frac{1}{X^2} \sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}} 1.
\end{aligned}$$

D'après le Corollaire 1 cette dernière somme est $\ll X\frac{\log P}{\log Q}$. Or $P = \exp\left((\log X)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right)$ et $Q = X^{\frac{\delta}{3}}$, donc

$$\frac{\log P}{\log Q} \ll \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

Ainsi

$$\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{\substack{n\sim X\\ p|n\Rightarrow p\notin[P,Q]}}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt \ll \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\left(\frac{T}{X}+1\right). \tag{8}$$

Il nous reste donc à majorer

$$\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{1+it}}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt.$$

Pour ce faire, on va scinder cette somme de sorte à séparer les sommes en p et les sommes en m.

Posons $H := (\log X)^5$. Pour s complexe on a

$$\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^s}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{a_m}{m^s} = \sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q}\ \sum_{\substack{\mathrm{e}^{\frac{j}{H}}\le p\le \mathrm{e}^{\frac{j+1}{H}}\\ P\le p\le Q}}\frac{1}{p^s}\sum_{\substack{X\mathrm{e}^{-\frac{j+1}{H}}\le m\le 2X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}\\ m\sim\frac{X}{p}}}\frac{a_m}{m^s}.$$

En enlevant la condition $m\sim\frac{X}{p}$ dans la troisième somme, il n'y a plus de dépendance en p, et on peut scinder la somme totale en la somme d'un produit d'une somme en p par une somme en m, et le seul chevauchement concerne les entiers de la forme mp se trouvant dans $[X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}}, X]$ ou dans $[2X, 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}]$.

Ainsi, en posant

$$Q_{j,H}(s) := \sum_{\mathrm{e}^{\frac{j}{H}}\le p\le \mathrm{e}^{\frac{j+1}{H}}}\frac{1}{p^s}$$

et

$$F_{j,H}(s) := \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{j+1}{H}}\le m\le 2X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}}\frac{a_m}{m^s}$$

on peut écrire

$$\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^s}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{a_m}{m^s} = \sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q} Q_{j,H}(s)F_{j,H}(s) + \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}}\le m\le X}\frac{d_m}{m^s} + \sum_{2X\le m\le 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}}\frac{d_m}{m^s}$$

où les d_m sont des réels (uniformément) bornés qui correspondent à ces chevauchements.

Utilisant les mêmes inégalités que précédemment on a

$$\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{1+it}}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt \ll \int_{T_0}^{T}\left|\sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q} Q_{j,H}(1+it)F_{j,H}(1+it)\right|^2 dt$$
$$+\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}}\le m\le X}\frac{d_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt+\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{2X\le m\le 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}}\frac{d_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q} Q_{j,H}(1+it)F_{j,H}(1+it)\right|^2 &\le \left(\sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q}1\right)\\ &\quad\times\sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q} Q_{j,H}(1+it)^2F_{j,H}(1+it)^2\\ &\le H\frac{\log Q}{\log P}\sum_{\lfloor H\log P\rfloor\le j\le H\log Q} Q_{j,H}(1+it)^2F_{j,H}(1+it)^2\\ &\le \left(H\frac{\log Q}{\log P}\right)^2 Q_{j,H}(1+it)^2F_{j,H}(1+it)^2\end{aligned}$$

pour un certain $j\in[\lfloor H\log P\rfloor, H\log Q]$ réalisant le maximum des termes de la somme.

Donc

$$\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{P\le p\le Q}\frac{1}{p^{1+it}}\sum_{m\sim\frac{X}{p}}\frac{a_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt \ll \left(H\frac{\log Q}{\log P}\right)^2\int_{T_0}^{T} Q_{j,H}(1+it)^2F_{j,H}(1+it)^2 dt$$
$$+\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}}\le m\le X}\frac{d_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt+\int_{T_0}^{T}\left|\sum_{2X\le m\le 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}}\frac{d_m}{m^{1+it}}\right|^2 dt.$$

Puisque les d_m sont (uniformément) bornés, on peut encore une fois estimer ces deux dernières intégrales grâce au Corollaire 3. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T} \left| \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \leq m \leq X} \frac{d_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt &\ll \int_{-T}^{T} \left| \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \leq m \leq X} \frac{d_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt \\
&\ll (T+X) \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \leq m \leq X} \frac{|d_m|^2}{m^2} \\
&\ll (T+X) \frac{1}{X^2} \left(X - X\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \right) \\
&\ll \left(\frac{T}{X} + 1 \right) \frac{1}{H} \\
&= \frac{1}{(\log X)^5} \left(\frac{T}{X} + 1 \right)
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité $\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \geq 1 - \frac{1}{H}$.

De même

$$\begin{aligned}
\int_{T_0}^{T} \left| \sum_{2X \leq m \leq 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}} \frac{d_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt &\ll \int_{-T}^{T} \left| \sum_{2X \leq m \leq 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}} \frac{d_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt \\
&\ll (T+X) \sum_{2X \leq m \leq 2X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}}} \frac{|d_m|^2}{m^2} \\
&\ll (T+X) \frac{1}{X^2} \left(X\mathrm{e}^{\frac{1}{H}} - X \right) \\
&\ll \left(\frac{T}{X} + 1 \right) \frac{1}{H} \\
&= \frac{1}{(\log X)^5} \left(\frac{T}{X} + 1 \right)
\end{aligned}$$

car comme $\frac{1}{H} \leq 1$ on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\frac{1}{H}} &= 1 + \frac{1}{H} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{H} \right)^2 + \dots \\
&\leq 1 + \frac{1}{H} \left(1 + \frac{1}{2!} + \dots \right) \\
&= 1 + \frac{\mathrm{e}}{H}.
\end{aligned}$$

Maintenant, majorons $Q_{j,H}(1+it)$ pour $T_0 \leq t \leq T$. On a $j \geq \lfloor H \log P \rfloor \geq H \log P - 1$ et $P = \exp\left((\log X)^{\frac{2}{3}+\varepsilon}\right)$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{j}{H}} &\geq \mathrm{e}^{\frac{H \log P - 1}{H}} \\ &= P\mathrm{e}^{-\frac{1}{H}} \\ &\geq \frac{P}{\mathrm{e}} \\ &> \exp\left((\log X)^{\frac{2}{3}+\frac{\varepsilon}{2}}\right). \end{aligned}$$

De même $j \geq H \log Q$ et $Q = X^{\frac{\delta}{3}}$ donc

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\frac{j+1}{H}} &\leq \mathrm{e}^{\frac{H \log Q + 1}{H}} \\ &= Q\mathrm{e}^{\frac{1}{H}} \\ &\leq \mathrm{e}Q \\ &< X. \end{aligned}$$

Enfin, $t \leq T \leq X$ donc en appliquant le Lemme 4 on obtient, pour tout $A > 0$

$$\begin{aligned} Q_{j,H}(1+it) &= \sum_{\mathrm{e}^{\frac{j}{H}} \leq p \leq \mathrm{e}^{\frac{j+1}{H}}} \frac{1}{p^{1+it}} \\ &\ll_A \frac{\log X}{|t|+1} + (\log X)^{-A}. \end{aligned}$$

Or $t \geq T_0 = (\log X)^{10}$ donc

$$Q_{j,H}(1+it) \ll (\log X)^{-9}.$$

Donc, en utilisant une dernière fois le Corollaire 3, on a

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{T} \left|Q_{j,H}(1+it)F_{j,H}(1+it)\right|^2 dt &\ll (\log X)^{-18} \int_{T_0}^{T} \left|F_{j,H}(1+it)\right|^2 dt \\ &= (\log X)^{-18} \int_{T_0}^{T} \left| \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{j+1}{H}} \leq m \leq 2X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}} \frac{a_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt \\ &\ll (\log X)^{-18} \left(T + X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}\right) \sum_{X\mathrm{e}^{-\frac{j+1}{H}} \leq m \leq 2X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}} \frac{a_m^2}{m^2} \\ &\ll (\log X)^{-18} \left(T + X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}\right) \frac{1}{X\mathrm{e}^{-\frac{j}{H}}} \end{aligned}$$

Or $j \leq H \log Q$ donc $\mathrm{e}^{\frac{j}{H}} \leq Q = X^{\frac{\delta}{3}}$. Donc

$$\int_{T_0}^{T} |Q_{j,H}(1+it)F_{j,H}(1+it)|^2 \, dt \ll \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}} + \frac{1}{(\log X)^{18}}.$$

Donc on a

$$\int_{T_0}^{T} \left| \sum_{P \leq p \leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m \sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt \ll \frac{1}{(\log X)^5} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}} + \frac{1}{(\log X)^{18}}.$$

Comme $5 \geq \frac{1}{3} - \varepsilon$, on a $\frac{1}{(\log X)^5} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) \ll \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right)$, et comme $T \leq X$, on a que $\frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}} \to +\infty$ quand X tend vers $+\infty$ donc $\frac{1}{(\log X)^{18}} \ll \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}}$. Donc

$$\int_{T_0}^{T} \left| \sum_{P \leq p \leq Q} \frac{1}{p^{1+it}} \sum_{m \sim \frac{X}{p}} \frac{a_m}{m^{1+it}} \right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}}. \tag{9}$$

En rassemblant nos estimations (8) et (9), on a

$$\int_{T_0}^{T} \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{3}}}.$$

Enfin, on a vu que

$$\int_{0}^{T_0} \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}},$$

donc on obtient finalement que

$$\int_{0}^{T} \left| \sum_{n \sim X} \frac{\lambda(n)}{n^{1+it}} \right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}} \left(\frac{T}{X} + 1 \right) + \frac{T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}}.$$

□

3) Fin de la preuve

On peut maintenant finaliser la démonstration du théorème de Matömaki et Radziwiłł.

Proposition 4 *Soient δ et $\varepsilon > 0$. On a*

$$\int_{X}^{2X} \left| \frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x + X^\delta} \lambda(n) \right|^2 dx \ll_\varepsilon \frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 2 on a

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{X^\delta}\sum_{x\le n\le x+X^\delta}\lambda(n)\right|^2 dx \ll \int_0^{X^{1-\delta}}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt + \max_{T>X^{1-\delta}}\frac{X^{1-\delta}}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt.$$

Or d'après le Lemme 6, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{X^{1-\delta}}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 d &\ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\left(\frac{X^{1-\delta}}{X}+1\right)+\frac{X^{1-\delta}}{X^{1-\frac{\delta}{2}}}\\ &= \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\left(X^{-\delta}+1\right)+X^{-\frac{\delta}{2}}\\ &\ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.\end{aligned}$$

De même, d'après le Lemme 6, pour tout $T > X^{1-\delta}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{X^{1-\delta}}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt &\ll_\varepsilon \frac{X^{1-\delta}}{T}\left(\frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\left(\frac{2T}{X}+1\right)+\frac{2T}{X^{1-\frac{\delta}{2}}}\right)\\ &\ll \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\left(2X^{-\delta}+\frac{X^{1-\delta}}{T}\right)+2X^{-\frac{\delta}{2}}\\ &\ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}\end{aligned}$$

donc

$$\max_{T>X^{1-\delta}}\frac{X^{1-\delta}}{T}\int_T^{2T}\left|\sum_{n\sim X}\frac{\lambda(n)}{n^{1+it}}\right|^2 dt \ll_\varepsilon \frac{1}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

Ainsi on a bien

$$\int_X^{2X}\left|\frac{1}{X^\delta}\sum_{x\le n\le x+X^\delta}\lambda(n)\right|^2 dx \ll_\varepsilon \frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

□

Théorème 17 (Matomäki et Radziwiłł, 2015)
Soit $\delta > 0$. Pour presque tout $x \in [X, 2X]$, on a

$$\sum_{x\le n\le x+X^\delta}\lambda(n) = o(X^\delta)$$

quand $X \to +\infty$.

Démonstration. D'après la Proposition 2 il suffit de montrer que pour tous $\delta, \varepsilon > 0$ on a

$$\int_X^{2X} \left| \frac{1}{X^\delta} \sum_{x \leq n \leq x + X^\delta} \lambda(n) \right|^2 dx \ll_\varepsilon \frac{X}{(\log X)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}$$

ce qui est le résultat de la Proposition 4. □

Annexes

A. L'intégrale de Stieltjes

Le formalisme de l'intégrale de Stieltjes permet de faciliter les manipulations d'intégrales de fonctions en escaliers, comme par exemple les fonctions π ou L. On peut ainsi effectuer des intégrations par parties sur ce genre d'intégrales sans passer par une décomposition en les points de discontinuité puis des transformations d'Abel. Il faut savoir que l'intégrale de Stieltjes englobe également l'intégrale de Lebesgue, mais ce n'est pas l'utilisation que nous en avons ici.

Définition 18 *Soient a et b des réels avec $a < b$, et soient α et f des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

Notons Δ l'ensemble des couples (σ, ξ) où σ est une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a, b]$ et ξ est un n-uplet de points ξ_i de $[a, b]$ tels que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$. Pour une telle subdivision σ de $[a, b]$, posons

$$\delta(\sigma) := \sup_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Si la limite

$$\lim_{\substack{\delta(\sigma) \to 0 \\ (\sigma,\ \xi) \in \Delta}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))$$

existe, on appelle celle-ci l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à α de a à b et on la note

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x).$$

Cette définition s'étend bien sûr par linéarité à des fonctions à valeurs complexes.

Les propositions suivantes (dont on peut trouver les démonstrations dans [4], chap. 1) permettent de justifier les intégrations par parties faites dans le mémoire.

Proposition 5 *Soient a et b des réels avec $a < b$, et soient f et α des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Si f est dérivable sur $[a, b]$ et si l'intégrale de Stieltjes de α par rapport à f de a à b existe alors on a*

$$\int_a^b \alpha(x)df(x) = \int_a^b \alpha(x)f'(x)dx.$$

Proposition 6 *Soient a et b des réels avec $a < b$, et soient f et α des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et si α est à variation bornée sur $[a, b]$ alors l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à α de a à b existe et on a*

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)df(x).$$

Remarque : En particulier si α est une fonction en escaliers, elle est à variations bornées. On peut alors voir une somme de la forme

$$\sum_{M<n\leq N} a_n b(n)$$

où b est une fonction continue comme

$$\int_M^N b(t)d\left(\sum_{n\leq t} a_n\right).$$

Voici maintenant une application simple de ces résultats :

Théorème 19
On a

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \sim \log\log x$$

quand $x \to +\infty$.

Démonstration. Par la version faible du théorème des nombres premiers on a

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Écrivons

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} &= \int_2^x \frac{d(\pi(t))}{t} \\
&= \frac{\pi(x)}{x} - \frac{\pi(2)}{2} + \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}dt \\
&= \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}dt + O(1) \\
&= \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + O\left(\int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^2}\right) \\
&= \log\log x - \log\log 2 + O\left(\int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^2}\right) \\
&= \log\log x + o(\log\log x)
\end{aligned}$$

quand $x \to +\infty$, d'où le résultat, le $o(\log\log x)$ provenant du fait que l'intégrale est convergente. $\square$

B. Les séries de Dirichlet

Définition 20 *On appelle série de Dirichlet toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_n \frac{a_n}{n^s},$$

où $(a_n)_n$ est une suite de nombres complexes.

Par une transformation d'Abel, on peut voir que si une série de Dirichlet converge en $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ alors elle converge pour tout $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma > \sigma_0$. Il en est de même pour la convergence absolue, et il est donc naturel de définir les abscisse de convergence et abscisse de convergence absolue d'une série de Dirichlet.

Définition 21 *Soit $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet. On définit son abscisse de convergence par*

$$\sigma_c := \inf\{x \in \mathbb{R}, \sum_n \frac{a_n}{n^s} \textit{ converge}\},$$

et son abscisse de convergence absolue par

$$\sigma_a := \inf\{x \in \mathbb{R}, \sum_n \frac{a_n}{n^s} \textit{ converge absolument}\}.$$

L'exemple le plus simple de série de Dirichlet est la fonction zêta de Riemann, correspondant au cas où la suite $(a_n)_n$ est constante, égale à 1. Celle-ci permet d'exprimer facilement certaines autres sommes de séries de Dirichlet. On a par exemple

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1),$$

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma > \frac{1}{2}),$$

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \quad (\sigma > 2),$$

où μ désigne la fonction de Möbius et φ désigne l'indicatrice d'Euler.

On a alors les résultats faciles suivants :

Théorème 22
Soit $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet d'bascisse de convergence σ_c. On a $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

Démonstration. Clairement, $\sigma_c \leq \sigma_a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}$ converge, on a

$$a_n \ll n^{\sigma_c+\varepsilon}.$$

Donc

$$\frac{a_n}{n^{\sigma_c+1+2\varepsilon}} \ll \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

et donc la série

$$\sum_n \frac{a_n}{n^{\sigma_c+1+2\varepsilon}}$$

converge absolument.

On a donc $\sigma_a \leq \sigma_c + 1 + 2\varepsilon$, d'où le résultat en faisant tendre ε vers 0. $\square$

Théorème 23
Soit $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet. Soit $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ tel que la série $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ converge absolument. Alors la série converge normalement, et donc uniformément sur

$$\Omega := \{s \in \mathbb{C}, \Re e(s) \geq \sigma_0\}.$$

Démonstration. Cela découle du fait que

$$\forall x > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |x^z| = x^{\Re e(z)}.$$

On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{s\in\Omega} \left|\frac{a_n}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sup_{s\in\Omega} \frac{|a_n|}{n^{\Re e(s)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} < +\infty$$

par convergence absolue de la série en s_0. $\square$

Théorème 24
Soit $\sum\limits_n \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence σ_c et de somme F.
Soient $\varepsilon > 0$ et σ_0 dans $]\sigma_c, \sigma_c + 1[$.
Alors on a uniformément pour $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_c + 1$

$$F(s) \ll |\tau|^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}\ (|\tau| \geq 1).$$

Démonstration. On va supposer $0 < \varepsilon < \sigma_0 - \sigma_c$, le résultat sera a fortiori vrai pour ε plus grand. Posons pour $t \in \mathbb{R}$

$$A(t) := \sum_{n\leq \mathrm{e}^t} \frac{a_n}{n^{\sigma_c+\varepsilon}}.$$

On a donc

$$A(t) = F(\sigma_c + \varepsilon) + o(1)$$

quand $t \to +\infty$.

Pour $\sigma \geq \sigma_0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
|F(s) &= \left| \sum_{n \leq N} \frac{a_n}{n^s} + \int_{\log N}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(s-\sigma_c-\varepsilon)} dA(t) \right| \\
&\leq \sum_{n \leq N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} + \left| -N^{s-\sigma_c-\varepsilon} A(\log N) + (s - \sigma_c - \varepsilon) \int_{\log N}^{+\infty} A(t) \mathrm{e}^{-t(s-\sigma_c-\varepsilon)} dt \right| \\
&\leq \sum_{n \leq N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} + N^{-(\sigma-\sigma_c-\varepsilon)} \sum_{n \leq N} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_c+\varepsilon}} + |s - \sigma_c - \varepsilon| \int_{\log N}^{+\infty} |A(t)| \mathrm{e}^{-t(\sigma-\sigma_c-\varepsilon)} dt
\end{aligned}$$

Or

$$|a_n| \ll n^{\sigma_c+\varepsilon},$$

donc

$$\sum_{n \leq N} \frac{|a_n|}{n^{\sigma_c+\varepsilon}} \ll \sum_{n \leq N} 1 \ll N$$

et

$$\sum_{n \leq N} \frac{|a_n|}{n^\sigma} \ll \sum_{n \leq N} N^{\sigma_c-\sigma+\varepsilon} \ll N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}.$$

De plus, puisque $A(t)$ tend vers une limite finie en $+\infty$, on a $A(t) = O(1)$, donc

$$\int_{\log N}^{+\infty} |A(t)| \mathrm{e}^{-t(s-\sigma_c-\varepsilon)} dt \ll \int_{\log N}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t(\sigma-\sigma_c-\varepsilon)} dt = \frac{N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}}{\sigma - \sigma_c - \varepsilon}.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
|F(s)| &\ll N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + \frac{|s - \sigma_c - \varepsilon| N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}}{\sigma - \sigma_c - \varepsilon} \\
&\ll N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + \frac{|\tau| N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}}{\sigma - \sigma_c - \varepsilon} \\
&\ll N^{1-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon} + |\tau| N^{-(\sigma-\sigma_c)+\varepsilon}
\end{aligned}$$

car $0 < \varepsilon < \sigma_0 - \sigma_c \leq \sigma - \sigma_c$.

En prenant $N = \lfloor |\tau| \rfloor$ on obtient le résultat. $\square$

C. Les théorèmes de Mertens

Le but de cette annexe est de démontrer les deux théorèmes de Mertens utilisés dans la section I.5).

Théorème 25 (Premier théorème de Mertens)
On a

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Démonstration. Soit $x \geq 1$ dans $\mathbb{R}$, posons $n := \lfloor x \rfloor$. On va estimer de plusieurs manières différentes la quantité $\log(n!)$. Tout d'abord on a

$$\begin{aligned}
\log(n!) &= \sum_{k=1}^{n} \log(k) \\
&= \int_1^n \log t \, d\lfloor t \rfloor \\
&= \int_1^n \log t \, dt - \int_1^n \log t \, d\{t\} \\
&= n \log n - n + 1 + \int_1^n \frac{\{t\}}{t} \, dt
\end{aligned}$$

d'où

$$n \log n - n + 1 \leq \log(n!) \leq (n+1) \log n - n + 1. \tag{10}$$

Ensuite on a

$$\log(n!) = \sum_{p \leq n} v_p(n!) \log p$$

où v_p désigne la valuation p-adique. Or par la bien connue formule de Legendre (qu'on peut retrouver par une simple inversion d'ordre de sommation) on a pour p premier

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

En utilisant l'encadrement $y - 1 \leq \lfloor y \rfloor \leq y$ pour y réel, on obtient

$$\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

et donc

$$n \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} - \sum_{p \leq n} \log p \leq \log(n!) \leq n \sum_{p \leq n} \frac{\log p}{p} + n \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p(p-1)}. \tag{11}$$

Utilisant une astuce d'Erdös[27], on remarque que tous les nombres premiers dans l'intervalle $]n, 2n]$ divisent le numérateur de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ donc

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \mid \binom{2n}{n}.$$

Or on a

$$\binom{2n}{n} \leq (1+1)^{2n} = 4^n,$$

donc

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq 4^n,$$

d'où

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p \leq n \log 4.$$

On en déduit par récurrence

$$\sum_{p\leq n} p \leq n \log 4.$$

Utilisant (8) et (9) on obtient

$$n \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} - n \log 4 \leq n \log n$$

et donc

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \leq \log x + \log 4.$$

De plus on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p(p-1)} &\leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\log m}{m(m-1)} \\
&\leq \sum_{r=1}^{+\infty} \sum_{2^{r-1}\leq m\leq 2^r} \frac{r \log 2}{m(m-1)} \\
&= \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r \log 2}{2^r} \\
&= \log 4.
\end{aligned}$$

Donc en réutilisant (8) et (9) on a

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \sum_{p\leq n} \frac{\log p}{p} \geq \log n + \frac{1}{n} - (1 + \log 4) \geq \log x - (1 + \log 4)$$

27. Paul Erdös (1913-1996)

et finalement on a bien

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1).$$

$\square$

Théorème 26 (Second théorème de Mertens)
On a

$$\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{\mathrm{e}^{-c}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right),$$

où $c>0$ est une constante.

Démonstration. Tout d'abord on a pour $x\ge 2$

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\left(\frac{1}{\prod_{p\le x}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)-c_0+\frac{\nu(x)}{2(x-1)}$$

où

$$c_0:=\sum_{p}\left(\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)-\frac{1}{p}\right)$$

et où

$$\begin{aligned}\nu(x)&=2(x-1)\sum_{p>x}\left(\log\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)-\frac{1}{p}\right)\\&=2(x-1)\sum_{p>x}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{p^{-k}}{k}\\&\le\sum_{p>x}\frac{2(x-1)}{2p(p-1)}\\&\le\sum_{n>x}\frac{(x-1)}{n(n-1)}\\&=\frac{x-1}{\lfloor x\rfloor}\\&\le 1.\end{aligned}$$

De plus on a vu dans l'annexe A que

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\sim\log\log x$$

quand x tend vers $+\infty$. En fait on va montrer que pour $x \geq 2$ on a

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

où $c_1 > 0$.

En combinant les deux estimations précédentes de $\sum\limits_{p\leq x} \frac{1}{p}$ on obtiendra bien la résultat souhaité avec $c = c_0 + c_1$.

Par le premier théorème de Mertens, on a que

$$R(t) := \sum_{p\leq t} \frac{\log p}{p} - \log t = O(1).$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} &= \int_2^x \frac{1}{\log t} d\left(\sum_{p\leq t} \frac{\log p}{p}\right) \\
&= \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{dR(t)}{\log t} \\
&= \log\log x - \log\log 2 + \frac{R(x)}{\log x} - \frac{R(2)}{\log 2} + \int_2^x \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt
\end{aligned}$$

par intégrations par parties.

En notant $R := \sup\limits_t |R(t)|$ on a

$$\left|\frac{R(x)}{\log x} - \int_x^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt\right| \leq \frac{2R}{\log x} = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Finalement, en prenant

$$c_1 := -\log\log 2 - \frac{R(2)}{\log 2} + \int_2^{+\infty} \frac{R(t)}{t(\log t)^2} dt$$

on a bien le résultat attendu. $\square$

Bibliographie

[1] H. Halberstam et H.-E. Richert, *Sieve Methods*, London Mathematical Society Monographs, 1974

[2] G. Harman, *Prime-Detecting Sieves*, London Mathematical Society Monographs, 2007

[3] H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic number theory*, volume 53 de l'American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, 2004

[4] K. Matomäki et M. Radziwiłł, *A note on the Liouville function in short intervals*, disponible sur http ://arxiv.org à arXiv :1502.02374 [math.NT]

[5] M. Mendès France et G. Tenenbaum, *Les nombres premiers*, Presses Universitaires de France, 2000

[6] M. Ram Murty, *Problems in Analytic Number Theory*, Springer, 2008

[7] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Belin, 2008

[8] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946