Année universitaire 2019-2020
Licence 3 de mathématiques
Intégration - Feuille 4

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $F(n) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \geqslant n\})$.

a. Établir la formule $\displaystyle\int_X \lfloor f \rfloor \mathrm{d}\mu = \sum_{n \geqslant 1} F(n)$.

b. Démontrer que si f est intégrable, alors $F(n)n$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Posons $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant n\}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} \int_{A_n} f^2 \mathrm{d}\mu$ converge.

Exercice 3

Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(α) il existe une suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{T}$ telle que $\mu(A_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\displaystyle X = \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$;
(β) il existe une application $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ intégrable.

Exercice 4

a. Vérifier que l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est intégrable.

b. Établir la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 + 1}$; on pourra développer $\dfrac{u}{1-u}$ en série avec $u = e^{-x}$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

a. Démontrer que si f est croissante, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f' \mathrm{d}\lambda \leqslant f(b) - f(a)$; on pourra utiliser le lemme de Fatou.

b. Prouver que si f' est bornée, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f' \mathrm{d}\lambda = f(b) - f(a)$.

Exercice 6
Soient $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable.

a. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{T}$ tel que f soit bornée sur A et que $\displaystyle\int_{X \setminus A} |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$; *indication :* on pourra considérer $A_n = \{x \in X \mid |f(x)| \leqslant n\}$ pour n assez grand.

b. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $B \in \mathcal{T}$ vérifiant $\mu(B) < \alpha$, on a $\displaystyle\int_B |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

c. Supposons $(X, \mathcal{T}, \mu) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}, \lambda)$. Prouver que l'application $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\displaystyle\int_{[0,x]} f \mathrm{d}\lambda$ est uniformément continue.

Exercice 7

a. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Soit $a \in X$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $L^1(X, \mathcal{T}, \delta_a)$?

b. L'application $\mathbf{1}_{[0,1]}$ est-elle équivalente dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ à une application continue ?

Exercice 8
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré.

a. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $A \in \mathcal{T}$. Établir l'inégalité

$$\mu\big(\big\{x \in X \bigm| |f(x)| \geqslant \varepsilon \text{ et } |f(x) - 1| \geqslant \varepsilon\big\}\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_X |\mathbf{1}_A - f| \mathrm{d}\mu \; .$$

b. Désignons par F l'image de $\{\mathbf{1}_A \; ; \; A \in \mathcal{T} \text{ et } \mu(A) < +\infty\}$ dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Montrer que F est fermé dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 9
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Soit $f \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. On suppose que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers f presque partout et que $(\|f_n\|_{L^1})_{n \geqslant 0}$ converge vers $\|f\|_{L^1}$. Démontrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers f dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$; on pourra considérer $g_n = |f_n - f| + |f| - |f_n|$.

Exercice 10
Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Notons S l'image dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ de l'ensemble des applications $X \to \mathbb{R}$ intégrables en escalier. Prouver que S est dense dans $L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 11

a. Soit t un réel > 0. Vérifier que l'application $f_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à x associe $\dfrac{\sin x}{x} e^{-xt}$ est intégrable.

b. Montrer que l'application $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ qui à t associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_t(x)\mathrm{d}x$ est dérivable et déterminer sa dérivée ; *indication :* prouver que F est dérivable sur $]\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$.

c. En déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(t^2+1)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$.

a. Démontrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

b. En considérant la dérivée de $f + g$, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 13

a. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y+1)(x^2y+1)}$.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x\mathrm{d}x}{x^2-1}$.

Exercice 14

a. Vérifier que l'application $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ qui à (x,y) associe $e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y}\frac{\sin^2 y}{y}\mathrm{d}y$.

Exercice 15

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$. Comparer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$; *indication :* considérer la dérivée de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}$.