Devoir Maison Intégration

Exercice 1 (Nombres algébriques et transcendants)
Un nombre complexe α est dit *algébrique* s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ **non nul** tel que $P(\alpha) = 0$. Par exemple $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ est algébrique car on a $P(\alpha) = 0$, avec $P = X^4 + 1$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\mathbb{Z}_n[X] = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$ est dénombrable.
2. En déduire que l'ensemble $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques est dénombrable. On pourra écrire $\overline{\mathbb{Q}}$ comme une réunion d'ensembles finis indexée par $n \geq 0$ et $\mathbb{Z}_n[X]$.
3. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit *transcendant*. Montrer qu'il existe des nombres transcendants. (Êtes-vous pour autant capable de donner un nombre transcendant ?)

On appelle *nombre de Liouville* un nombre réel ξ qui vérifie $\forall n \geq 1, \exists \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \geq 2, 0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}$. Liouville a montré en 1844 que ces nombres sont transcendants.

4. Montrer que pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ qui contient une infinité de 1, le nombre $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{2^{k!}}$ est un nombre de Liouville (Indication : Considérer les rationnels $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^{k!}}$).
5. En déduire que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville n'est pas dénombrable.
6. Soit $n \geq 3$. Montrer que la mesure de Lebesgue de
$$\left\{x \in [0,1] \mid \exists q \geq 2, \exists p \in \{0,\dots,q-1\}, 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^n}\right\}$$
est inférieure à $\displaystyle\sum_{q\geq 2} \frac{2}{q^{n-1}}$.
7. En déduire la mesure de Lebesgue de $\mathcal{L} \cap [0,1]$ puis celle de $\mathcal{L}$ (on pourra se convaincre que le translaté d'un nombre de Liouville est encore un nombre de Liouville).

L'ensemble $\mathcal{L}$ a d'autres propriétés surprenantes. Bien que petit au sens de la théorie de la mesure, il est en fait dense dans $\mathbb{R}$, et on peut montrer que tout nombre réel non nul peut s'écrire comme la somme et comme le produit de deux nombres de Liouville.

Exercice 2 (Équation fonctionnelle de Cauchy)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère l'équation fonctionnelle suivante
$$(\mathcal{C}) : \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$
On va donner des conditions suffisantes pour que f soit linéaire. On notera λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f vérifie $(\mathcal{C})$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}, f(x) = \alpha x$ (Indication : commencer par calculer $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$).
2. Montrer que si f vérifie $(\mathcal{C})$ et est continue en 0, alors f est continue sur $\mathbb{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha x$.
3. On va montrer le résultat suivant (lemme de Steinhaus) : si $A \subset \mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors l'ensemble $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$ est un voisinage de 0.
   (a) Montrer que si le résultat est vrai pour tout partie mesurable bornée A de $\mathbb{R}$, alors il est vrai pour toute partie mesurable de $\mathbb{R}$.

(b) On suppose maintenant A bornée. On rappelle que la mesure de Lebesgue est régulière : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert O tels que $K \subset A \subset O$ et $\lambda(O \setminus K) < \varepsilon$. En déduire qu'il existe K compact et O ouvert tels que $K \subset A \subset O$ et $2\lambda(K) > \lambda(O)$.

(c) Justifier que pour tout $k \in K$, il existe $a_k > 0$ tel que $]k - a_k, k + a_k[\subset O$.

(d) En utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, on extrait du recouvrement $K \subset \bigcup_{k\in K} \left]k - \frac{a_k}{2}, k + \frac{a_k}{2}\right[$ un sous-recouvrement fini $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left]k_i - \frac{a_i}{2}, k_i + \frac{a_i}{2}\right[$ avec $k_1, \dots, k_n \in K$ et on introduit $a = \min_{1\leq i\leq n} a_i > 0$. Justifier que pour tout $x \in \left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$, $K + x \subset O$.

(e) Soit $x \in \left]-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$. Montrer que $(K + x) \cap K \neq \emptyset$ (Indication : dans le cas contraire, que dire de la mesure de Lebesgue de $(K + x) \cup K$?). Conclure.

4. On suppose que f vérifie $(\mathcal{C})$ et que f est mesurable. On va montrer que f est continue en 0.

   (a) Soit O un voisinage de 0. Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que $V - V \subset O$.

   (b) Justifier que $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (q + V)$.

   (c) En déduire que $\mathbb{R} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}(q+V)$ puis qu'il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\lambda(f^{-1}(q+V)) > 0$. On pose $W = f^{-1}(q + V)$.

   (d) Montrer que $W - W$ est un voisinage de 0. Conclure.

Puisque $\mathbb{R}$ est naturellement un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie, on peut considérer (avec l'axiome du choix) une $\mathbb{Q}$-base $(e_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}$: tout réel x admet une écriture unique sous la forme $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ où pour tout $i \in I, \lambda_i \in \mathbb{Q}$, et seul un nombre fini de λ_i est non nul. Si f vérifie $(\mathcal{C})$ alors pour tout $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ on a $f(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i f(e_i)$, et réciproquement toute fonction définie ainsi vérifie $(\mathcal{C})$. On vérifie facilement que f définie ainsi est linéaire si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \in I, f(e_i) = \alpha e_i$. On peut donc construire des fonctions vérifiant $(\mathcal{C})$ mais qui ne sont ni linéaires, ni même mesurables !

Exercice 3 (Probabilité sur $\mathbb{N}$)

Dans cet exercice, on suppose l'existence d'une mesure μ définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ qui soit une mesure de probabilité (c'est-à-dire telle que $\mu(\mathbb{N}) = 1$) et telle que pour tout entier $k \geq 1$, $\mu(k\mathbb{N}) = \frac{1}{k}$.

1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux, alors $a\mathbb{N}$ et $b\mathbb{N}$ sont indépendants, c'est-à-dire que $\mu(a\mathbb{N} \cap b\mathbb{N}) = \mu(a\mathbb{N}) \times \mu(b\mathbb{N})$. Montrer qu'il en est de même de leurs complémentaires.

2. En déduire que si $k \geq 1$, alors pour tout $n > k$, on a

$$\mu(\{k\}) \leq \prod_{\substack{k<p\leq n \\ p \text{ premier}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

   (Indication : k n'est divisible par aucun nombre premier $p > k$).

3. En utilisant un développement en série géométrique, montrer que la quantité

$$\prod_{\substack{p\leq n \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

   tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. En déduire qu'une telle mesure μ ne peut exister.