ÉNS de Lyon — Algèbre Approfondie
M1 — 2020-2021

Partiel du 13 novembre 2020

Dans tout le partiel R désigne un anneau commutatif unitaire.

1. Projectivité

Soit P un R-module projectif de type fini. Montrer que P est de présentation finie.

2. Noethérianité

Soit I et J deux idéaux de R. On suppose que R/I et R/J sont des anneaux noethériens, montrer que $R/(I \cap J)$ est un anneau noethérien (indication : penser module plutôt qu'anneau).

3. Une propriété des modules plats

Soit M un R-module plat. L'objet de l'exercice est de montrer la propriété suivante : pour toute suite exacte

$$0 \to U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} M \to 0$$

et pour tout R-module N, la suite :

$$0 \to U \otimes N \xrightarrow{u \otimes 1_N} V \otimes N \xrightarrow{v \otimes 1_N} M \otimes N \to 0$$

est exacte.

1. Soit L un module libre, muni d'une surjection $p : L \to N$. Soit $K = \ker(p)$, et $i : K \to L$ l'inclusion. Montrer que les suites :

$$U \otimes K \xrightarrow{u \otimes 1_K} V \otimes K \xrightarrow{v \otimes 1_K} M \otimes K \to 0$$

et

$$0 \to U \otimes L \xrightarrow{u \otimes 1_L} V \otimes L \xrightarrow{v \otimes 1_L} M \otimes L \to 0$$

sont exactes.

2. Montrer que $\ker(u \otimes 1_K) \subset \ker(1_U \otimes i)$.

3. En déduire qu'on a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (U \otimes K)/\ker(u \otimes 1_K) \arrow[r, "u \otimes 1_K"] \arrow[d, "1_U \otimes i"'] & V \otimes K \arrow[r, "v \otimes 1_K"] \arrow[d, "1_V \otimes i"'] & M \otimes K \arrow[r] \arrow[d, "1_M \otimes i"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \otimes L \arrow[r, "u \otimes 1_L"] & V \otimes L \arrow[r, "v \otimes 1_L"] & M \otimes L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

4. Conclure.

4. Générateurs

Si M est un R-module, on note $g(M)$ le cardinal minimal d'une famille génératrice de M ($g(M)$ peut être infini).

On suppose qu'on a une suite exacte de R-modules :

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

1. Montrer qu'on a $g(V) \leq g(U) + g(W)$. En particulier, si U et W sont de type fini alors V aussi.

2. Donner un exemple où $g(V) < g(U) + g(W)$.

3. On suppose que U et W sont de présentation finie. Montrer que V est de présentation finie.

5. Produit tensoriel et modules projectifs

Soit P et Q deux R-modules tels que $P \otimes Q \simeq R^n$ pour un $n \geq 1$. Soit L un module libre tel qu'il existe une suite exacte $0 \to K \to L \to P \to 0$.

1. Montrer que $R^n \oplus \mathrm{im}(K \otimes Q \to L \otimes Q) \simeq L \otimes Q$.

2. Montrer que P et Q sont projectifs.