ÉNS de Lyon | Algèbre 1
2020-2021 | L3

TD 6 : Formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Exercice 1 — Déterminer la signature et le rang des formes quadratiques réelles suivantes :

1. $f(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.

2. $f(A) = \mathrm{Tr}(A^2)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

3. $f(A) = \mathrm{Tr}(A)^2$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

4. $f(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Pour chacun des trois derniers exemples, donner un sous-espace de dimension maximale sur lequel f est définie négative, et un sous-espace de dimension maximale sur lequel f est définie positive.

Exercice 2 —[Inégalité de Cauchy-Schwarz]

Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique réelle positive. On note φ la forme bilinéaire symétrique associée.

1. Montrer que pour tout (x, y) de $E \times E$, $\varphi(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$.
Indication : considérer le polynôme $t \mapsto q(x + ty)$.

2. Dans cette question, on suppose de plus q définie. Montrer que l'égalité n'est réalisée que si x et y sont proportionnels.

3. Montrer que $\ker(q) = C(q)$.

Exercice 3 — Soit q une forme quadratique réelle.

1. Montrer que q est anisotrope si et seulement si q est définie positive ou définie négative.
Indication : si x et y sont tels que $q(x) < 0$ et $q(y) > 0$, que peut-on dire de $t \mapsto q(x + ty)$?

2. Montrer que $\ker(q) = C(q)$ si et seulement si q est positive ou négative.

Exercice 4 —[Autour de la décomposition polaire]

1. Soit A, B, C dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A = B^2 = C^2$. Montrer que $B = C$.

2. En déduire l'unicité dans la décomposition polaire : Soit A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice S symétrique définie positive et une unique matrice Ω dans $O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = S\Omega$.

3. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : si K est un sous-groupe compact tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset K$, alors $K = O_n(\mathbb{R})$).

4. Montrer que toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit $S\Omega$ avec Ω une matrice orthogonale et S une matrice symétrique positive. (On pourra utiliser la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$.) Montrer par un exemple que Ω et S ne sont pas uniques en général.

Exercice 5 — Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{C})$. Vérifier que A est symétrique, et non diagonalisable. Quelle étape de la preuve de la diagonalisabilité des matrices réelles symétriques ne s'applique pas ici ?

Exercice 6 —[Signature et mineurs principaux]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit q une forme quadratique sur E, de matrice M dans la base e. Pour $1 \leq k \leq n$ on note $\Delta_k = \det((m_{i,j})_{i,j \leq k})$; les Δ_k sont les mineurs principaux de M.

1. On suppose que $\Delta_{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $u_n = e_n - \sum_{i<n} \alpha_i e_i$ est q-orthogonal à $e_1, \ldots, e_{n-1}$.

2. On suppose que $\Delta_{n-1} \neq 0$ et on note (r, s) la signature de la restriction de q à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Montrer que :

a. si $\Delta_n = 0$, q est de signature (r, s),

b. si Δ_n est de même signe que Δ_{n-1}, q est de signature $(r + 1, s)$,

c. si Δ_n est de signe opposé à Δ_{n-1}, q est de signature $(r, s + 1)$.

3. On suppose que $\Delta_i \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer que q est de signature $(n - s, s)$ où s est le nombre de changements de signe dans la suite $(1, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n)$.

Exercice 7 —[Signature d'une forme quadratique sur un corps fini]

Soit p un nombre premier différent de 2 et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps fini à p éléments. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_p^\times$ qui n'est pas un carré.

1. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{F}_p^\times$, l'équation $ax^2 + by^2 = 1$ a toujours des solutions dans $\mathbb{F}_p$.

Indication : Il y a exactement $\frac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_p$.

2. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension 2 est isomorphe à une forme quadratique donnée par la matrice I_2 ou par $\mathrm{Diag}(1, \alpha)$.

3. Montrer que toute forme quadratique non dégénérée sur un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à une forme quadratique donnée par la matrice I_n ou $\mathrm{Diag}(1, ...1, \alpha)$.