TD5 : Formes quadratiques

Dans toute la feuille, on fixe un corps k de caractéristique différente de 2. Tous les espaces vectoriels considérés sont sur k et de dimension finie.

Exercice 1 (Calculs explicites)

1. Décomposer suivant l'algorithme de Gauss les formes quadratiques :
a. $q_1(x, y, z) = (x + y)^2 - z^2$ sur $\mathbb{Q}^3$;
b. $q_2(x, y, z) = xy + xz + yz$ sur $\mathbb{Q}^3$;
c. $q_3(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$ sur $\mathbb{Q}^4$.

2. Pour chacune d'elles, préciser son noyau, son rang et son discriminant.

Exercice 2 — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et q un forme quadratique sur E. Montrer qu'il existe une unique forme quadratique q' sur $E/\ker q$ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = q'(\pi_q(x))$, où $\pi_q : E \longrightarrow E/\ker q$ est la projection dans le quotient. Montrer de plus que q' est non dégénérée.

Exercice 3 — Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et q une forme quadratique sur E. Montrer que la restriction $q_{|F}$ de q à F est non-dégénérée si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0\}$. Dans ce cas, a-t-on $F \oplus F^\perp = E$? Que dire si $C(q) \cap F = \{0\}$? Donner un exemple de forme quadratique q dégénérée telle que $q_{|F}$ est non dégénérée.

Exercice 4 — On considère la fonction $q : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(k) & \to & k \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$.

1. Vérifier que q est une forme quadratique.

2. Déterminer le cône isotrope de q et le rang de q.

3. On considère le sous-espace vectoriel F des matrices de trace nulle. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

Exercice 5 — On se place sur $V = \mathcal{M}_n(k)$. Déterminer le rang de la forme quadratique $M \mapsto \mathrm{Tr}(M^2)$.

Exercice 6 — Soit V un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V. Soit $x_1, \ldots, x_5 \in V$. Montrer qu'il existe $q \in \mathcal{Q}(V) \setminus \{0\}$ telle que $q(x_1) = \cdots = q(x_5) = 0$.
Indication : on pourra commencer par déterminer la dimension de $\mathcal{Q}(V)$.

Exercice 7 (Orthogonalisation simultanée)

Soient q et q' deux formes quadratiques sur un même espace V. On note respectivement f et f' leurs formes polaires. On suppose que q est non dégénérée.

1. Montrer qu'il existe un unique $u \in \mathrm{End}(V)$ tel que

$$f(u(x), y) = f'(x, y)$$

Indication : que pouvez-vous dire de l'application linéaire ℓ_f ?

2. Montrer que les sous-espaces propres de u, c'est-à-dire les sous-espaces $E_u(\lambda) = \ker(u - \lambda \,\mathrm{Id})$ pour $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$, sont en somme directe orthogonale pour q.

3. Montrer qu'ils sont aussi en somme directe orthogonale pour q'.

4. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de V qui est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale si, et seulement si, u est diagonalisable.

Exercice 8 (Cône isotrope)

Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel V. On considère son cône isotrope $C(q)$.

1. Montrer que $\ker q \subset C(q)$ et donner un exemple de forme quadratique q telle que $\ker q \neq C(q)$.

2. Si $C(q) \neq \ker q$, montrer que q est surjective dans K. Donner un exemple de forme quadratique $q \neq 0$ telle que $C(q) = \ker q$ mais qui n'est pas surjective dans K.

3. Montrer que si $C(q) \neq 0$ et q est non dégénérée, alors $\mathrm{Vect}(C(q)) = V$.