ÉNS Lyon Algèbre 1
2020–2021 L3

TD2 : Formes linéaires, dualité et transposition

Dans toute cette feuille on fixe un corps k. En l'absence de précision, les espaces vectoriels considérés sont sur k.

Exercice 1 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ la base canonique de k^n, $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de k^n et $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$, $(f_i^*)_{1\leq i\leq n}$ leurs bases duales respectives. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de e à f (c'est-à-dire que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a $f_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}e_i$).

1. Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on écrit $e_j^* = \sum_{i=1}^n a'_{i,j}f_i^*$, où $a'_{i,j} \in k$ pour $1 \leq i, j \leq n$. Déterminer $A' = (a'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ en fonction de A.

2. Exprimer la matrice de passage de e^* à f^* en fonction de A.

3. Retrouver ce résultat en utilisant la transposée d'un certain endomorphisme.

Exercice 2 — Soit $E = k_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n sur k. On se donne $n+1$ éléments distincts $a_0, \ldots, a_n$ de k et pour $i \in \{0, \ldots, n\}$, on note $f_i : P \mapsto P(a_i)$ la forme linéaire sur E d'évaluation en a_i.

1. Montrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E^*.

2. Calculer la base de E dont elle est duale.

3. On suppose que k est de caractéristique 0. Mêmes questions en fixant $a \in k$ et en considérant $f_i : P \mapsto P^{(i)}(a)$ pour $1 \leq i \leq n$.

Exercice 3 — Soit E un espace vectoriel de dimension n. Pour chaque $0 < p < n$ notons $\mathcal{G}_p(E)$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension p.

1. Montrer que pour tout $F, G \in \mathcal{G}_p(E)$ il existe un automorphisme $f : E \to E$ qui envoie F sur G.

2. Exhiber une bijection naturelle entre $\mathcal{G}_p(E)$ et $\mathcal{G}_{n-p}(E^*)$.

Exercice 4 — Soit $E = k[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note e_n^* l'application linéaire vérifiant $e_n^*(X^n) = 1$ et $e_n^*(X^i) = 0$ pour tout $i \neq n$. Montrer que $(e_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base de E^*, bien que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base de E. Montrer que E^* est isomorphe à $k^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5 — Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de V^*.

Montrer que $\mathrm{Vect}(\lambda_i)_{i\in I} = \{\mu \in V^* \mid \bigcap_i \ker \lambda_i \subset \ker \mu\}$. Donner une relation entre la dimension de cet espace et la dimension de $\bigcap_i \ker \lambda_i$.

Exercice 6 — Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(k)$, on définit la forme linéaire $\lambda_A \in \mathcal{M}_n(k)^*$ par $\lambda_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

1. Montrer que l'application $\lambda : \mathcal{M}_n(k) \to \mathcal{M}_n(k)^*$ définie par $A \mapsto \lambda_A$ est un isomorphisme.

2. Soit $\lambda \in \mathcal{M}_n(k)^*$ telle que $\lambda(AB) = \lambda(BA)$ pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$. Montrer que λ est proportionnelle à la trace.

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(k)$ deux matrices. On suppose que λ_B s'annule sur $\mathcal{C}_A = \{C \in \mathcal{M}_n(k),\ AC = CA\}$. On se propose de montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(k)$ telle que $B = AC - CA$.

On définit un endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(k)$ par $f(X) = AX - XA$. On introduit le sous-espace $W = \lambda(\ker f)$ de $\mathcal{M}_n(k)^*$.

a. Montrer que pour tout $C \in \ker f$, on a $\lambda_C(B) = 0$.

b. Montrer que $W^\top = \mathrm{im}\, f$.

c. Conclure.

4. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(k)$ contient une matrice inversible.

Exercice 7 — Soit V un espace vectoriel et W un sous-espace. On note $i : W \hookrightarrow V$ l'inclusion canonique et $\pi : V \twoheadrightarrow V/W$ l'application quotient.

1. Vérifier que pour tout $\lambda \in V^*$, ${}^t i(\lambda)$ est la restriction de λ à W.

2. Montrer que ${}^t\pi$ définit un isomorphisme naturel entre $(V/W)^*$ et $W^\perp$.

3. En déduire que si V est de dimension finie, alors $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$, et qu'on a l'égalité analogue pour les sous-espaces de V^*.

4. Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Montrer que W est stable par f si et seulement si $W^\perp$ est stable par ${}^t f \in \mathrm{End}(V^*)$.

Exercice 8 — Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : V \to W$ une application linéaire.

1. Montrer qu'il existe une famille finie $(w_i)_{i \in I}$ d'éléments de W et une famille finie de formes linéaires $\lambda_i \in V^*$, telles que $f = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$.

2. Montrer que le rang de f est le nombre minimal d'éléments w_i nécessaires pour une telle écriture.

3. Soit $(w_i)_{i \in I}$ une base de W. Montrer qu'il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de V^* telle que $f = \sum_i \lambda_i w_i$.

4. Montrer qu'avec ces notations, l'image de ${}^t f$ est le sous-espace de V^* engendré par les λ_i.

Exercice 9 — Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Montrer que le dual du conoyau de f (c'est-à-dire de $F/\mathrm{im}(f)$) est naturellement isomorphe au noyau de ${}^t f$.

Exercice 10 — Dans cet exercice, on choisit $k = \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lisses à support compact et à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel de dimension infinie. Notons $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ son dual. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, on définit l'application $D_f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $(g \mapsto \int_{\mathbb{R}} f.g)$. Pour toute forme linéaire $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit la dérivation ϕ' de ϕ par la formule $\phi'(g) = -\phi(g')$ pour tout $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application D_f et sa dérivation sont bien définies et sont des formes linéaires. Trouver une relation entre $(D_f)'$ et $D_{f'}$.

2. Montrer que l'application $\Pi : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$ donnée par $f \mapsto D_f$ est linéaire et injective.

3. Trouver un exemple d'une forme linéaire $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui n'est pas de la forme D_f pour une certaine $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et déterminer sa dérivation.

Si V et W sont des espaces vectoriels, on appelle *accouplement* entre V et W une application bilinéaire $\varphi : V \times W \to k$. On dit que φ est *parfait* si l'application linéaire $V \to W^*$ définie par $x \mapsto \varphi(x, \cdot) = (y \mapsto \varphi(x, y))$ est un isomorphisme.

Exercice 11 — Soit E un espace vectoriel de dimension finie et E^* son dual.

1. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E^* \to k$ définie par $\langle x, f \rangle \mapsto f(x)$ est un accouplement parfait entre E et E^*.

2. Montrer que si $f : E \to E$ est une application linéaire alors la transposée ${}^t f : E^* \to E^*$ est l'unique application linéaire telle que, pour tout $x \in E$ et $y \in E^*$, on a $\langle f(x), y \rangle = \langle x, {}^t f(y) \rangle$.

Exercice 12 — On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\phi : E \to E^*$ l'isomorphisme qui envoie $\mathcal{B}$ sur la base duale $\mathcal{B}^*$ de E^*.

1. Vérifier que l'application $(\cdot, \cdot) : E \times E \to k$ définie par $(x, y) = \langle x, \phi(y) \rangle$ est un accouplement parfait.

On dit qu'une application $f : E \to E$ est *symétrique* (resp. *anti-symétrique*) si $(f(x), y) = (x, f(y))$ (resp. $(f(x), y) = -(x, f(y))$) pour tout $x, y \in E$.

2. Soit $f : E \to E$ une application linéaire et A la matrice f dans la base $\mathcal{B}$ de E. Montrer que :

a. si f est symétrique, alors $A = {}^t A$;

b. si f est anti-symétrique, alors $A = -{}^t A$.

3. On suppose désormais que $k = \mathbb{R}$. Montrer que si f est anti-symétrique, alors $\mathrm{Id}_E + f : E \to E$ est un automorphisme.