TD11 : Théorie des caractères

Exercice 1 (Caractères irréductibles de groupes abéliens)

1. Soit G un groupe fini. On note R la représentation régulière de G. Calculer χ_R, puis montrer que $R = \oplus_{V \in \mathcal{I}(G)} V^{\dim V}$.

2. En déduire que $|G| = \sum_{V \in \mathcal{I}(G)} (\dim V)^2$, et que si $g \neq e$ alors $\sum_{V \in \mathcal{I}(G)} \dim V \chi_V(g) = 0$.

3. En déduire une autre démonstration du fait que les représentations irréductibles d'un groupe abélien fini sont de dimension 1.

4. Déterminer la table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque : On peut montrer que si G est abélien fini, alors G est isomorphe à $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$.

Exercice 2 (Caractères de $\mathfrak{S}_n$)

1. Soit V une représentation d'un groupe fini G, de caractère χ. Rappeler pourquoi $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ pour tout g dans G.

2. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que le caractère associé à une représentation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ est réel.

Remarque : En fait, un tel caractère prend toujours des valeurs entières.

3. On va maintenant dresser la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$. On notera ε la signature, et on rappelle qu'on connaît une représentation irréductible de dimension 3 qui est la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$.

1. Donner des représentants des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$ et le cardinal de chacune de ces classes.
2. Calculer le caractère de la représentation standard (on notera par la suite H pour la représentation standard).
3. Montrer que la représentation $H(\varepsilon)$ est irréductible non isomorphe à H.
4. Déterminer le nombre de représentations irréductibles restantes et leurs degrés, et compléter la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ (penser à utiliser les résultats de l'exercice 1).

Exercice 3 — Soit V une représentation de G, de caractère χ. Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \sigma : V \otimes V &\to V \otimes V \\ a \otimes b &\mapsto b \otimes a \end{aligned}$$

Soient $\mathrm{Sym}^2 V = \ker(\sigma - id)$ et $\Lambda^2 V = \ker(\sigma + id)$.

1. Montrer que σ est un morphisme de représentations de G.

2. Montrer qu'on a une décomposition $V \otimes V = \mathrm{Sym}^2 V \oplus \Lambda^2 V$ comme représentation de G, et calculer la dimension de ces deux sous-représentations.

3. Pour tout $g \in G$, exprimer les valeurs propres de g dans $\Lambda^2 V$ en fonction de ses valeurs propres dans V. En déduire une formule pour le caractère de $\Lambda^2 V$, puis celui de $\mathrm{Sym}^2 V$.

4. Montrer que si V est irréductible, alors $\dim(V \otimes V)^G \leq 1$. En déduire que $\varepsilon_2(\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2) \in \{-1, 0, 1\}$.

Remarque : $\varepsilon_2(\chi)$ est l'indicateur de Frobenius-Schur de χ. On montre que

$$\varepsilon_2(\chi) = \begin{cases} 1 \text{ si } \chi \text{ est le caractère d'une représentation réelle de } G \\ -1 \text{ si } \chi \text{ est à valeurs réelles, mais ne provient pas d'une représentation réelle de } G \\ 0 \text{ si } \chi \text{ est à valeurs complexes.} \end{cases}$$

Exercice 4 (Représentation de permutation)

Soit G un groupe fini agissant sur l'ensemble fini X et soit V_X la représentation de permutation associée.

1. Montrer que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{V_X}(g)$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X. *Indication : on pourra utiliser la formule de Burnside.*

2. Réciproquement, montrer directement que $\langle \chi_{V_X}, \mathbf{1}\rangle$ est le nombre d'orbites de l'action de G sur X, où $\mathbf{1}$ désigne la représentation triviale, et en déduire la formule de Burnside. *Indication : on rappelle qu'on a montré dans la feuille précédente que* $(V_X)^G = \oplus_{i=1}^r \mathbb{C}e_{X_i}$ *où les* X_i *sont les orbites, et* $e_{X_i} = \sum_{x\in X_i} e_x$.

3. On suppose maintenant que $|X| \geqslant 2$. Montrer que V_X n'est pas une représentation irréductible de G : on a une décomposition $V_X = \mathbf{1} \oplus W$ avec $W \neq \{0\}$.

4. Déterminer $\langle \chi_{V_X}, \chi_{V_X}\rangle$. On pourra introduire l'action de G sur $X \times X$ définie par $g.(x, y) = (g.x, g.y)$ pour tous $g \in G$, $x, y \in X$.

5. En déduire que W est irréductible si et seulement si X est de cardinal 2 ou G agit 2-transitivement sur X (c'est-à-dire que pour tous couples $(x, y), (x', y')$ tels que $x \neq y$ et $x' \neq y'$, il existe g dans G tel que $(x, y) = (g.x', g.y')$).

Exercice 5 (Représentation fidèles et simplicité)

1. Soit G un groupe fini. Montrer que G a au moins une représentation fidèle.

2. Montrer que tout sous-groupe distingué H peut s'écrire comme intersection de noyaux de représentations irréductibles de G.
Indication : On pourra appliquer la question précédente à G/H.

3. En déduire que G est simple si et seulement si toutes ses représentations irréductibles non triviales sont fidèles.

4. Montrer que G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible χ non trivial et pour tout $x \in G \setminus \{1\}$, on a : $\chi(x) \neq \chi(1)$.

Exercice 6 (Groupes non abéliens d'ordre 8)

1. Donner les classes de conjugaison du groupe diédral D_8 et ses caractères linéaires. En déduire sa table de caractères.
2. Notons $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ le groupe des quaternions, où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $k = ij = -ji$. Calculer ses classes de conjugaison.
3. Montrer que H_8 possède quatre caractères linéaires distincts. En déduire sa table de caractères. La comparer avec celle de D_8.
4. Montrer que les deux groupes D_8 et H_8 ne sont pas isomorphes.